Technische Universität Bergakademie Freiberg

Министерство образования Российсской Федерации
Московский государственный геологоразведочный университет

Diplomarbeit

Algebraische Untersuchung des Informationsbegriffes von K. Devlin

Tobias Schlemmer

17. April 2004

TU Bergakademie Freiberg
Fakultät für Mathematik und Informatik
Zur Erlangung des akademischen Grades: Diplom-Mathematiker

Министерство образования Российсской Федерации
Московский государственный геологоразведочный университет
Геофизический факультет
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Betreut durch:

Prof. Dr. rer. nat. Udo Hebisch (TUBAF) und
Prof. Dr. Юрий Анатольевич Фарков (Jurij Anatoljewitsch Farkow, MGGRU)

Übergabetermin des Themas: 18. September 2003
Abgabetermin der Arbeit: 18. März 2004

Eingereicht am: 9. März 2004

Verteidigung voraussichtlich im Juni 2004 in Moskau

Die vorliegende Fassung wurde nochmals von Druckfehlern bereinigt und für zweiseitigen Druck mit einer Bindekorrektur von 0,5 cm aufbereitet.

Tobias Schlemmer
keinstein_junior@gmx.net
http://www.stunet.tu-freiberg.de/~schlemmer/

Gesetzt mit LaTeX 2_ε.
Dokumentklasse: tsdiplom, Rev. 1.12.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Symbolverzeichnis

$(M, \leq)$	halb- oder total geordnete Menge, Verband, Seite 13
$\mathbb{K}$; (G, M, κ)	Kontext, Seite 16
$\gamma\, g$	Gegenstandsbegriff zu g, Seite 17
$\mu\, m$	Merkmalsbegriff zu m, Seite 17
$\mathbb{S}_m$	Skala zum Merkmal m, Seite 18
$m(g)$	Ausprägung des Merkmals m von g, Seite 18
w_x^e	Eigenschaftsfunktion, Seite 20
$(e, x, w_x^e(t), t)$	Eigenschaft von x zur Zeit t, Seite 20
$w_x(t)$	Weltlinie von x, Seite 20
$w = (W, F)$	Welt, Seite 20
$s = (W_s, F_s)$	Situation, Seite 21
R	Relation, Seite 28
$\Sigma = (\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$	Signatur, Seite 28
$a, \dot{a}$	Individuum, Parameter, Seite 29
IND, TIM, LOC	Typ der Individuen, zeitlichen und räumlichen Lokalisierungen, Seite 30
$\mathbb{I}^I$, $\mathbb{I}^R$, $\mathbb{I}^T$	Interpretation der Individuen, der Relationen, der Tupel, Seite 33
$\mathbb{I}$; $(\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$	Interpretation, Seite 35
$C = [\, S_1 \Longrightarrow S_2 \,]$	Bindung, Seite 63
T_G^A, T_M^B	Typ zum Begriffsinhalt bzw. zum Begriffsumfang A, Seite 77
$\mathfrak{B}(G, M, \kappa)$	Begriffsverband zum Kontext (G, M, κ), Seite 17
D_G	Datenmenge zum Typ G, Seite 29
D_e	Wertebereich der Eigenschaft e, Seite 20
T	Menge der Zeitpunkte in der Welt, Seite 20
V_G	Parametermenge zum Typ G, Seite 29
$\mathfrak{G}$	Menge der Grundtypen, Seite 28
$\mathfrak{I}_{\mathrm{co}}$	Menge der kohärenten abstrakten Situationen, Seite 53
$\mathfrak{R}$	Menge der Relationen, Seite 28

$\mathfrak{T}(\Sigma)$	Menge der Typen zur Signatur Σ, Seite 29
$\mathfrak{S}$	Menge der Situationen zur Welt w, Seite 21
$\phi \circ \psi$	Verknüpfung von zwei Abbildungen: $\phi \circ \psi(x) := \phi\big(\psi(x)\big)$
$\mathfrak{P}(M)$	Potenzmenge von M: $\mathfrak{P}(n) := \{\, A \mid A \subseteq M \,\}$
$M_1 \mathbin{\dot\cup} M_2$	Disjunkte Vereinigung von M_1 und M_2
$(M)^{\complement}$	Mengentheoretisches Komplement zu M
$a \vee b$	Supremum von a und b, Seite 14
$a \wedge b$	Infimum von a und b, Seite 14
$\sup T$; $\bigvee T$	Supremum der Menge T, Seite 14
$\inf T$; $\bigwedge T$	Infimum der Menge T, Seite 14
$\bigsqcup M$	Vereinigung der Begriffe aus M, Seite 17
$\bigsqcap M$	Durchschnitt der Begriffe aus M, Seite 17
$s_1 \cup s_2$, $s_1 \cap s_2$	Durchschnitt und Vereinigung der Situationen s_1 und s_2, Seite 25
X^{κ}	Ableitungsoperator zur Inzidenzrelation κ, Seite 16
$s(I)$	Situation zu I, Seite 58
$\mathrm{Obj}(s)$	Menge der Objekte der Situation s, Seite 21
$\mathrm{Obj}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle)$	Menge der Individuen von $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$, Seite 37
$\mathrm{Act}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle)$	Menge der aktiven Objekte von $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$, Seite 38
$[\, \dot{x} \mid s \models I \,]$	Objekttyp, Seite 55
$[\, \dot{s} \mid \dot{s} \models I \,]$	Situationstyp, Seite 56
$\dot{q} \restriction C$, $\dot{q} \restriction \sigma$	Eingeschränkter Parameter, Seite 57
$\sigma[f]$, $I[f]$	Verankerung des Infons σ bzw. der Menge I, Seite 55
$w(\mathbb{K})$	Welt zum Kontext $\mathbb{K}$, Seite 66
$\mathbb{K}_t(w)$	Kontext zur Welt w zum Zeitpunkt t, Seite 65
$\breve{w}(\mathbb{K}_G)$	Erweiterte Welt zum Kontext, Seite 75
$T_1 \sqcup T_2$, $T_2 \sqcap_{\varphi} T_2$	Supremum, Infimum bezüglich $\sqsubseteq_d$, Seite 79
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b, Seite 13
$(A, B) \sqsubseteq (C, D)$	(A, B) ist Unterbegriff von (C, D), Seite 16
$s_1 \subseteq s_2$	Situation s_1 ist Teilsituation von s_2, Seite 22
$s \models \langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$	s akzeptiert $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$, Seite 38
$\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle$	Äquivalenz von Informationsgehalten, Seite 40
$T_1 : T_2$, $T_1 \doteq T_2$	T_1 ist Teiltyp von bzw. syntaktisch gleich zu T_2, Seite 29
$T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$, $T_1 =_{\mathbb{I}} T_2$	T_1 ist Interpretationsuntertyp bzw. -gleich zu T_2, Seite 57
$x : T$, $\dot{p} : T$	x bzw. $\dot{p}$ ist vom Typ $x : T$, Seite 29
$T_1 \sqsubseteq_d T_2$	T_1 ist Untertyp von T_2, Seite 79

Einführung

Während der Umgang mit Informationen für uns geläufig ist, gibt es noch keine allgemeingültige, anerkannte mathematische Theorie, die alle Aspekte der Information umfasst. Verschiedene Autoren haben versucht, sich dem Thema von dem Blickwinkel der Philosophie, der Physik, der Statistik, der Logik und Algebra her zu nähern. Einen eher logischen Ansatz verfolgt Keith Devlin in seinem Buch „Infos und Infone“ (Devlin 1993) mit der so genannten Situationstheorie. Ziel dieser Theorie ist es, ein Werkzeug zu liefern, mit dem Informationsströme untersucht werden können, und das möglichst wenige Einschränkungen an die zugehörige Logik macht. Insofern wird kein formaler Ableiungsmechanismus geliefert, sondern es werden verschiedene Mechanismen der Informationsverarbeitung untersucht. Dabei ist das vorliegende Werk weniger ein mathematisches Lehrbuch im herkömmlichen Sinn, als eine Beschreibung der Vorgehensweise beim Aufstellen einer neuen Theorie. Mit der vorliegenden Diplomarbeit soll versucht werden, die dort beschriebenen mathematischen Strukturen algebraisch zu formulieren und verbandstheoretisch einzuordnen.

Dazu werden in Kapitel 1 die notwendigsten Verbandstheoretischen Begriffe eingeführt, bevor in Kapitel 2 ein situationstheoretischer Formalismus aufgebaut wird. Dabei wird versucht, die Eigenschaften der Begriffe aus (Devlin 1993) zu rekonstruieren. Teilweise wird es dennoch nötig, einzelne Begriffe neu zu definieren. Beispielsweise geht Devlin von der uns umgebenden Welt aus, während hier eine algebraische Definition einer solchen notwendig ist. Dadurch ergeben sich weitere Einschränkungen, so dass die hier verwendeten Begriffe zwar die äußere Struktur Keith Devlins aufweisen, aber ihre innere Definition neu eingeführt werden musste. In Kapitel 3 wird schließlich gezeigt werden, dass sich damit die Grundbegriffe der formalen Begriffsanalyse (Begriffe und Begriffsverbände) darstellen lassen.

1 Verbandstheoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Begriffe der Verbandstheorie beschrieben, die für das Verständnis der vorliegenden Diplomarbeit notwendig sind. Zur weiteren Vertiefung und Veranschaulichung sei an entsprechender Stelle auf geeignete Literatur verwiesen.

1.1 Halbordnungen und Verbände

Beispiele und weitere Erläuterungen zu Halbordnungen und Verbänden sind in der gängigen Literatur zur Verbandstheorie, wie zum Beispiel (Birkhoff 1940) oder aber auch in vielen, darauf aufbauenden, spezielleren Werken wie (Копытов 1984) zu finden.

Definition 1.1. Sei M eine Menge und $\leq \subseteq M \times M$ eine binäre Relation. Dann ist $\leq$ eine *Halbordnung* und $(M, \leq)$ eine *halb geordnete Menge*, wenn für beliebige Elemente a, b und c aus M die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Reflexivität: $a \leq a$.

Antisymmetrie: Wenn $a \leq b$ und $b \leq a$, so folgt $a = b$.

Transitivität: Aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.

Falls zusätzlich noch für alle $a \in M$ und $b \in M$ gilt

$$a \leq b \text{ oder } b \leq a, \tag{1.1}$$

so heißt $(M, \leq)$ *linear* oder *total geordnete Menge* und entsprechend $\leq$ *lineare* oder *totale Ordnung*. $\diamondsuit$

Definition 1.2. Sei $(M, \leq)$ eine halb geordnete Menge. Ein Element $a \in M$ heißt *kleinstes Element* der Halbordnung $\leq$, wenn für alle $b \in M$ gilt:

$$a \leq b. \tag{1.2}$$

Analog heißt c *größtes Element*, wenn für alle $b \in M$ gilt:

$$b \leq c. \tag{1.3}$$

$\diamondsuit$

Definition 1.3. Sei $(M, \leq)$ eine halb geordnete Menge. Falls zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ die Menge

$$\{\, x \in M \mid \forall a \in T : a \leq x \,\} \tag{1.4}$$

ein kleinstes Element c besitzt, so wird dieses *Supremum* der Menge T genannt:

$$c = \sup T = \bigvee T. \tag{1.5}$$

Besteht T nur aus den beiden Elementen a und b, so wird dies mit

$$c = a \vee b \tag{1.6}$$

notiert.

Analog heißt das größte Element c von

$$\{\, x \in M \mid \forall a \in T : x \leq a \,\} \tag{1.7}$$

im Falle seiner Existenz *Infimum* von T:

$$c = \inf T = \bigwedge T. \tag{1.8}$$

Für zwei Elemente a und b lautet die Notation

$$c = a \wedge b. \tag{1.9}$$

$\Diamond$

Definition 1.4. Eine halb geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt *Supremum-Halbverband* (*Infimum-Halbverband*), falls für beliebige zwei Elemente $a \in M$ und $b \in M$ das Supremum $a \vee b$ (das Infimum $a \wedge b$) existiert. Ist $(M, \leq)$ sowohl Supremum-, als auch Infimum-Halbverband, so heißt $(M, \leq)$ *Verband*.

Der Verband $(M, \leq)$ heißt *vollständiger Verband*, wenn für jede beliebige Teilmenge $T \subseteq M$ das Infimum $\inf T$ und das Supremum $\sup T$ existieren. $\Diamond$

Definition 1.5. Sei $(M, \leq)$ ein vollständiger Verband. Eine Menge $N \subseteq M$ heißt *supremumdicht* ($\vee$-dicht) in M, falls jedes Element von M als Supremum einer Teilmenge von N dargestellt werden kann. Analog heißt N *infimumdicht* ($\wedge$-dicht), falls für alle $x \in M$ gilt:

$$x = \inf \{\, y \in N \mid x \leq y \,\}. \tag{1.10}$$

$\Diamond$

Definition 1.6. Sei $(M, \leq)$ eine halb geordnete Menge. Eine Selbstabbildung f auf M heißt *isoton*, wenn

$$\text{aus } x \leq y \text{ folgt } f(x) \leq f(y), \tag{1.11}$$

extensiv, wenn

$$x \leq f(x) \tag{1.12}$$

und *idempotent*, wenn

$$f(f(x)) = f(x) \tag{1.13}$$

für alle x, $y \in M$.

Eine extensive, isotone und idempotente Selbstabbildung auf M heißt *Hüllenfunktion von M*. ♢

Folgerung 1.7. *Eine Selbstabbildung $f : M \to M$ einer halb geordneten Menge $(M, \leq)$ ist genau dann eine Hüllenfunktion, wenn für alle $x \in M$ und alle $y \in M$ gilt:*

$$x \leq f(y) \text{ genau dann, wenn } f(x) \leq f(y). \tag{1.14}$$

□

Beispiel 1.8. Es sei $(M, \leq)$ ein vollständiger Verband und $N \subseteq M$. Definiert man $f : M \to M$ gemäß $f(x) = \inf\{\, y \in N \mid x \leq y \,\}$, dann ist f eine Hüllenfunktion von M.

Beispiel 1.9. Offensichtlich ist auch die Identität $Id : x \mapsto x$ eine Hüllenfunktion für jede halb geordnete Menge.

1.2 Informationsstrukturen und Begriffsverbände

Definition 1.10. Eine partiell geordnete Menge $(I, \leq)$ heißt *Informationsstruktur*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. Es existiert ein kleinstes Element $0 \in I$, die *leere Information*.
2. Für $x, y \in I$ existiert stets das Infimum $x \wedge y \in I$.
3. Zu $x, y, u \in I$ mit $x \leq u$ und $y \leq u$ existiert das Supremum $x \vee y \in I$. ♢

Beispiel 1.11. Offensichtlich ist jeder Verband mit einem kleinsten Element eine Informationsstruktur. Damit ist folglich auch jeder vollständige Verband eine solche.

Begriffsverbände sind mächtige Werkzeuge für die formale Untersuchung von Objekten und ihren Eigenschaften. Seit 1982, als R. WILLE den ersten Artikel darüber veröffentlichte, erschienen unzählige Werke zu dieser Thematik. Dies belegt unter anderem die Literaturliste von (Ganter und Wille 1996), einer ausführlichen Beschreibung der mathematischen Grundlagen der formalen Begriffsanalyse. Dort finden sich auch die Beweise zu den folgenden Sätzen und Folgerungen.

Definition 1.12. Ein *Kontext* $\mathbb{K} = (G, M, \kappa)$ besteht aus

1. einer Menge G von *Gegenständen* oder *Objekten*,
2. einer Menge M von *Merkmalen* oder *Attributen* und
3. einer *Inzidenzrelation* $\kappa \subseteq G \times M$. Dabei bedeutet $g\ \kappa\ m$ für $g \in G$ und $m \in M$, dass der Gegenstand g das Merkmal m besitzt.

Für jeden Kontext gibt es die *Ableitungsoperatoren*

$$X^\kappa = \{\, m \in M \mid g\ \kappa\ m \text{ für alle } g \in X \,\} \quad (X \subseteq G) \text{ und} \tag{1.15}$$

$$Y^\kappa = \{\, g \in G \mid g\ \kappa\ m \text{ für alle } m \in Y \,\} \quad (Y \subseteq M). \tag{1.16}$$

Unter einem *Begriff* eines Kontextes (G, M, κ) versteht man ein Paar (A, B) mit $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $A^\kappa = B$ und $B^\kappa = A$. Dabei heißt A *Umfang* und B *Inhalt* des Begriffs (A, B).

Sind (A_1, B_1) und (A_2, B_2) Begriffe desselben Kontextes, so nennt man (A_1, B_1) *Unterbegriff* von (A_2, B_2) beziehungsweise (A_2, B_2) *Oberbegriff* von (A_1, B_1), wenn $A_1 \subseteq A_2$ gilt, was gleichbedeutend mit $B_1 \supseteq B_2$ ist (siehe Satz 1.13). Man schreibt dann

$$(A_1, B_1) \sqsubseteq (A_2, B_2). \tag{1.17}$$

$\diamondsuit$

Satz 1.13. *Die Ableitungsoperatoren bilden eine* GALOISverbindung *zwischen den Potenzmengen $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{P}(M)$. Das heißt, es gelten die folgenden Beziehungen*

$$T_1 \subseteq T_2 \text{ impliziert } T_1^\kappa \supseteq T_2^\kappa, \tag{1.18}$$

$$T \subseteq T^{\kappa\kappa} \text{ und } T^\kappa = T^{\kappa\kappa\kappa} \tag{1.19}$$

für alle T und alle T_j aus $\mathfrak{P}(G)$ oder $\mathfrak{P}(M)$. Außerdem hat man

$$\Big(\bigcup T_j\Big)^\kappa = \bigcap T_j^\kappa \text{ und} \tag{1.20}$$

$$\Big(\bigcap T_j\Big)^\kappa \supseteq \bigcup T_j^\kappa \tag{1.21}$$

für alle T_j aus $\mathfrak{P}(G)$ oder $\mathfrak{P}(M)$.

Satz 1.14 (Hauptsatz der formalen Begriffsanalyse). *Bezüglich der Relation $\sqsubseteq$ bildet die Menge $\mathfrak{B}(G, M, \kappa)$ aller Begriffe eines Kontextes (G, M, κ) einen vollständigen Verband, den* Begriffsverband *von (G, M, κ). Dabei gilt für das Infimum und das Supremum einer beliebigen Familie $(A_j, B_j)_{j \in J}$ von Begriffen:*

$$\bigsqcap_{j \in J} (A_j, B_j) = \Big(\bigcap_{j \in J} A_j, \Big(\bigcup_{j \in J} B_j \Big)^{\kappa\kappa} \Big), \tag{1.22}$$

$$\bigsqcup_{j \in J} (A_j, B_j) = \Big(\Big(\bigcup_{j \in J} A_j \Big)^{\kappa\kappa}, \bigcap_{j \in J} B_j \Big). \tag{1.23}$$

Ist umgekehrt $(V, \leq)$ ein vollständiger Verband, so gilt $V \cong \mathfrak{B}(G, M, \kappa)$ genau dann, wenn es Abbildungen $\gamma : G \to V$ und $\mu : M \to V$ gibt, so dass $\gamma(G)$ supremumdicht und $\mu(M)$ infimumdicht in V sind und $g \,\kappa\, m$ genau dann, wenn $\gamma\, g \leq \mu\, m$ für alle $g \in G$ und $m \in M$ gilt. Insbesondere hat man stets

$$V \cong \mathfrak{B}(V, V, \leq). \tag{1.24}$$

Folgerung 1.15. *Die Funktionen*

$$\gamma : G \to \mathfrak{B}(G, M, \kappa) \text{ und} \tag{1.25}$$

$$\mu : M \to \mathfrak{B}(G, M, \kappa) \tag{1.26}$$

mit

$$\gamma\, g := (g^{\kappa\kappa}, g^{\kappa}) \text{ und} \tag{1.27}$$

$$\mu\, m := (m^{\kappa}, m^{\kappa\kappa}) \tag{1.28}$$

erfüllen die Bedingungen aus Satz 1.14 für $V = \mathfrak{B}(G, M, \kappa)$.

Definition 1.16. Ein *mehrwertiger Kontext* (G, M, W, κ) besteht aus den Mengen G, M und W und einer dreistelligen Relation κ zwischen G, M und W (das heißt: $\kappa \subseteq G \times M \times W$), wobei gilt:

$$\text{aus } (g, m, w) \in \kappa \text{ und } (g, m, v) \in \kappa \text{ folgt stets } w = v. \tag{1.29}$$

Die Elemente von G nennen wir *Gegenstände*, die von M die *Merkmale* und die von W die *Merkmalausprägungen* oder *Werte*. $\Diamond$

Bemerkung 1.17. Die Bedingung (1.29) legt es nahe, mehrwertige Merkmale als partielle Abbildungen aus G in W zu betrachten. Aus diesem Grunde können wir definieren:

$$m(g) := w \text{ genau dann, wenn } (g, m, w) \in \kappa. \tag{1.30}$$

Definition 1.18. Eine *Skala* zum Merkmal m eines mehrwertigen Kontextes ist ein (einwertiger) Kontext $\mathbb{S}_m := (G_m, M_m, \kappa_m)$ mit $m(G) \subseteq G_m$. Die Gegenstände einer Skala nennen wir *Skalenwerte*, die Merkmale *Skalenmerkmale*. ◊

Definition 1.19. Ist (G, M, W, κ) ein mehrwertiger Kontext und sind $\mathbb{S}_m$, $m \in M$, Skalen, so wird der *abgeleitete Kontext bezüglich der schlichten Skalierung* der Kontext (G, M', κ') mit

$$M' := \dot{\bigcup_{m \in M}} M_m \tag{1.31}$$

und

$$g \; \kappa' \; (m, n) \text{ genau dann, wenn } m(g) = w \text{ und } w \; \kappa_m \; n \tag{1.32}$$

definiert. ◊

Beispiel 1.20. Das einfachste Beispiel für eine Skala zum Merkmal m mit der Wertemenge W_m ist die so genannte *Nominalskala*

$$\mathbb{N}_n := (W_m, W_m, \{ (w, w) \mid w \in W_m \}) \tag{1.33}$$

mit $n = |W_m|$. Diese splittet ein Merkmal in alle seine Werte auf.

2 Situationstheorie

> „Sprecher sprechen im Allgemeinen über einen gewissen Teil der Welt. Dies ist in der Tat eines der Hauptmotive für die Situationstheorie.“

So beschreibt Keith Devlin (Devlin 1993, S. 306) einen wichtigen Bereich der Informationsübermittlung, das Gespräch, als Grundlage einer Theorie der Information. Sein spezielles Ziel ist es, ein Werkzeug zu liefern, mit dem Informationsflüsse untersucht werden können. Dabei geht er von der Tatsache aus, dass Information *propositional* ist, also immer Information über etwas (typischerweise einen Teil der Welt – eine Situation) ist.

Ähnlich, wie auch bei anderen Ansätzen (siehe auch Hebisch 1991), werden hier Informationen als Elemente großer strukturierter Mengen, so genannter abstrakter Situationen, betrachtet. Diese können ihre Informationen aus realen Situationen unserer Welt beziehen, auch wenn man diese in den seltensten Fällen vollständig beschreiben kann. Die Strukturierung wird also von der Realität vorgegeben.

So genannte *kognitive Akteure* nehmen diese Informationen wahr, speichern oder verarbeiten sie und reagieren darauf. Neben der *Individuation* (das heißt dem Erkennen, der Digitalisierung) von Information gibt es auch die Möglichkeit der *Diskriminierung*, des Reagierens auf Sachverhalte, ohne die Information vorher direkt zu verarbeiten. Jeder Akteur kann dabei meist nur eine begrenzte Anzahl von Informationen individuieren. Diese Sicht auf die Welt wird *Individuationsschema* genannt.

Andererseits sind für theoretische Betrachtungen oft auch weitere Informationen über einen Sachverhalt interessant. Je nachdem, aus welcher Sicht die Welt gesehen wird, verwendet man das so genannte *Akteurschema* oder das *Theoretikerschema* als Individuationsschema.

Während es verschiedene Zweige der Situationstheorie mit abweichenden Axiomen-Systemen gibt (siehe Barwise 1989), soll hier der Vorschlag von Keith Devlin als Grundlage dienen. Beispiele für andere Theorien und Anwendungen der Situationstheorie sind bei Zalta (siehe Zalta 1993), Restall (siehe Restall 1996) und Huibers (siehe Huibers u. a. 1996) zu finden.

2.1 Welt und Situationen

Um den Rahmen dessen festzulegen, womit sich die Situationstheorie beschäftigt, soll hier nun eine Welt als „Spielwiese“ definiert werden, wo sich dann die Situationen „tummeln“ können. Dabei bedienen wir uns einer Idee aus der Relativitätstheorie, der Weltlinie. Dort bezeichnet sie die gesamte Bahn eines Objektes in Raum und Zeit. Wir verallgemeinern diesen Begriff, indem wir nicht nur den Ort, sondern auch sämtliche Eigenschaften des Objektes mit in die Kurve hinein nehmen. Der Einfachheit halber nehmen wir aber an, alle Eigenschaften können als Funktionen der Zeit dargestellt werden.

Definition 2.1. Sei W eine Menge, deren Elemente *Objekte* genannt werden und E eine Menge, deren Elemente *Eigenschaften* heißen. Weiterhin sei T eine Menge, deren Elemente als *zeitliche Lokalisierungen* bezeichnet werden. Jeder Eigenschaft $e \in E_x \subseteq E$ eines Objektes $x \in W$ sei ein *Wertebereich* D_e und eine *Eigenschaftsfunktion*

$$w_x^e : T \to D_e \tag{2.1}$$

zugeordnet. Diese kann auch partiell definiert sein. Ein Quadrupel

$$(e, x, w_x^e(t), t) \in \{ e \} \times \{ x \} \times D_e \times T \tag{2.2}$$

wird *Eigenschaft von x zur Zeit t* genannt. Das Tupel

$$w_x(t) = \left(w_x^e(t)\right)_{e \in E_x} \tag{2.3}$$

heißt *Weltlinie* von x. ♢

Definition 2.2. Sei W eine Menge von Objekten. Für jedes $x \in W$ existiere eine Weltlinie $w_x(t)$. Dann heißt das Paar $w = (W, \{ w_x(t) \mid x \in W \})$ eine *Welt*.

Existiert weiterhin eine Menge L von *Forderungen* an die Weltlinien, so heißt w *(physikalisch) möglich* bezüglich L, wenn die Weltlinien von w diese Forderungen erfüllen. Andernfalls heißt sie *(physikalisch) unmöglich*. Die Forderungen aus L werden auch *Natur-* oder *physikalische Gesetze* genannt. ♢

Definition 2.3. Sei $x \in W$ ein Objekt und $w_x(t)$ eine Weltlinie dazu. Weiterhin existiere eine Menge $T_x \subseteq T$. Dann bezeichnet $w_x(t)|_{T_x}$ eine auf T_x *eingeschränkte Weltlinie*, das heißt eine Weltlinie, deren Eigenschaftsfunktionen genau für die Elemente aus T_x definiert ist, wo sie auch in T einen definierten Wert annehmen. ♢

Definition 2.4. Sei $w = (W, \{ w_x(t) \mid x \in W \})$ eine Welt und $W_s \subseteq W$ eine nicht leere Menge von Objekten der Welt. Weiterhin sei jedem $x \in W_s$ eine nicht leere Menge zeitlicher Lokalisierungen $T_x \subseteq T$ so zugeordnet, dass mindestens ein Zeitpunkt $t \in T_x$ existiert, für den $w_x(t)$ definiert ist.

Das Paar $s = (W_s, \{ w_x(t)|_{T_x} \mid x \in W_s \})$ heißt *reale Situation* zur Welt w. Die Menge aller Situationen zur Welt w wird mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet.

Der Operator Obj wirkt auf Situationen entsprechend

$$\mathrm{Obj}(s) := W_s \tag{2.4}$$

und bezeichnet die *Menge* W_s *der Objekte der Situation.* ♢

Folgerung 2.5. *Gilt*

$$\{ x \in W \mid w_x(t) \textit{ ist nirgends definiert} \} = \emptyset, \tag{2.5}$$

so ist die Welt w *eine reale Situation zu sich selbst.*

Beweis. Sei $W_s = W$ und $T_x = T$ für alle $x \in W$. Weiterhin sei mit

$$s := (W_s, \{ w_x(t)|_{T_x} \mid x \in W_s \})$$

eine globale Situation definiert. Dann ist $s \in \mathfrak{S}$, da die Inklusionen aus Definition 2.4 (Seite 21) auch von der resultierenden Gleichheit erfüllt werden. □

Bemerkung 2.6. Wir werden gelegentlich die Welt w wie eine Situation behandeln, auch wenn sie streng genommen keine solche ist. Dann beziehen wir uns auf die Situation

$$w' = (W', \{ w_x(t) \mid x \in W' \}) \tag{2.6}$$

mit

$$W' = W \setminus \{ x \in W \mid w_x(t) \text{ ist nirgends definiert} \}. \tag{2.7}$$

Bemerkung 2.7. Die von uns betrachteten Situationen erstrecken sich häufig über zeitliche und – sofern dies die Welt zulässt – räumliche Gebiete, die aber nicht zwangsläufig zusammenhängend sind. Je nachdem, inwiefern sich die Situation zeitlich ändert, handelt es sich um *statische* oder *dynamische Situationen*. Während sich die statischen nur über eine Anzahl gleichzeitiger räumlicher Lokalisierungen erstreckt, beinhaltet eine dynamische Situation eine zeitliche Abfolge von Lokalisierungen.

Definition 2.8. Seien $s_1 = (W_{s_1}, F_{s_1}) \in \mathfrak{S}$ und $s_2 = (W_{s_2}, F_{s_2}) \in \mathfrak{S}$ zwei Situationen mit $W_{s_1} \subseteq W_{s_2}$. Falls zu jedem Objekt $x \in W_{s_1}$ und jeder seiner Eigenschaften e die Eigenschaftsfunktion $w^e_{x,2}(t)$ in der Weltlinie $w_{x,2}(t)$ aus F_{s_2} an allen Zeitpunkten t definiert ist, wo auch $w^e_{x,1}(t)$ aus F_{s_1} existiert, und weiterhin an diesen Punkten gilt

$$w^e_{x,1}(t) = w^e_{x,2}(t), \tag{2.8}$$

so heißt s_1 *Teilsituation* von s_2. Dies wird mit $s_1 \subseteq s_2$ notiert. ♢

Folgerung 2.9. *Die Relation $\subseteq$ ist eine Halbordnung auf $\mathfrak{S}$.*

Beweis. Es sind die drei Eigenschaften einer Halbordnung, Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität, zu zeigen. Seien s_1 und s_2 entsprechend Definition 2.8 (Seite 22) definiert. Dann gilt für die einzelnen Eigenschaften:

Reflexivität. Für $s_1 = s_2$ gilt:

$$W_{s_1} = W_{s_2}.$$

Außerdem sind die beiden Eigenschaftsfunktionen $w^e_{x,1}(t)$ und $w^e_{x,2}(t)$ an denselben Stellen definiert und an diesen auch identisch. Damit gelten sowohl $s_1 \subseteq s_2$, als auch $s_2 \subseteq s_1$.

Antisymmetrie. Angenommen es gelte $s_1 \subseteq s_2$ und $s_2 \subseteq s_1$, so folgt für die beiden Objektmengen:

$$W_{s_1} \subseteq W_{s_2} \text{ und } W_{s_1} \supseteq W_{s_2}.$$

Damit gilt also $W_{s_1} = W_{s_2}$. Betrachten wir nun die Eigenschaftsfunktionen $w^e_{x,1}(t)$ und $w^e_{x,2}(t)$. Angenommen $w^e_{x,1}(t)$ sei an einem Zeitpunkt t_1 definiert. Dann ist wegen $s_1 \subseteq s_2$ auch $w^e_{x,2}(t)$ zum Zeitpunkt t_1 definiert. Aus derselben Bedingung folgt auch $w^e_{x,1}(t_1) = w^e_{x,2}(t_1)$. Analog folgt allein aus der Existenz eines definierten Wertes für $w^e_{x,2}(t_2)$ auch $w^e_{x,1}(t_2) = w^e_{x,2}(t_2)$. Damit gilt $w^e_{x,1}(t) = w^e_{x,2}(t)$ für alle Eigenschaften e. Dies bedeutet für die Menge der Eingeschränkten Weltlinien $F_{s_1} = F_{s_2}$. Damit gilt aber auch $s_1 = s_2$.

Transitivität. Gelten für drei Situationen s_1, s_2 und s_3 die beiden Bedingungen

$$s_1 \subseteq s_2 \text{ und } s_2 \subseteq s_3,$$

so folgt für die drei Objektmengen:

$$W_{s_1} \subseteq W_{s_2} \subseteq W_{s_3}, \text{ also } W_{s_1} \subseteq W_{s_3}.$$

Ist nun eine einzelne Eigenschaftsfunktion $w^e_{x,1}(t)$ zu einem Objekt x aus W_{s_1} an einem Zeitpunkt t_1 definiert, so existieren aufgrund der Situationsinklusion auch die entsprechenden Eigenschaftsfunktionen $w^e_{x,2}(t)$ und $w^e_{x,3}(t)$ zu den Situationen s_2 und s_3. Diese sind auch für den Zeitpunkt t_1 definiert (für s_2 wegen s_1 und für s_3 wegen s_2). Außerdem gilt für den Zeitpunkt t_1

$$w^e_{x,1}(t_1) = w^e_{x,2}(t_1) = w^e_{x,3}(t_1) \text{ also } w^e_{x,1}(t_1) = w^e_{x,3}(t_1).$$

Damit gilt aber auch $s_1 \subseteq s_3$.

Also ist $\subseteq$ tatsächlich eine Halbordnung. □

Satz 2.10. *Die Menge $\mathfrak{S}$ aller Situationen bildet mit der Relation $\subseteq$ einen Supremum-Halbverband. Unter Hinzunahme einer leeren Situation $s_\emptyset = (\emptyset, \emptyset)$ ergibt sich sogar ein vollständiger Verband.*

Beweis. Sei $S = \{ s_j \mid j \in J \} \subseteq \mathfrak{S}$ eine Menge von Situationen zur Welt w. Dann existiert mindestens eine Situation s_e, für welche für alle $j \in J$ die Beziehung $s_j \subseteq s_e$ gilt. Für ein Objekt x, das in zwei Situationen s_j und s_k vorkommt, für das also $x \in W_{s_j}$ und $x \in W_{s_k}$ gilt, sind die eingeschränkten Weltlinien $w_x(t)|_{T^j_x}$ und $w_x(t)|_{T^k_x}$ an den gemeinsam definierten Stellen identisch (siehe Definition 2.4, Seite 21). Damit kann man nun aus den gesamten eingeschränkten Weltlinien zum Objekt x eine gemeinsame Weltlinie $w_x(t)|_{T_x}$ konstruieren, indem zu jedem

$$t \in T_x := \bigcup_{j \in J} T^j_x$$

der Wert für $w_x(t)|_{T_x}$ von derjenigen Situation genommen wird, wo er definiert ist. Existiert kein solcher Wert, so bleibt die eingeschränkte Weltlinie an dieser Stelle undefiniert.

Betrachtet man nun

$$\begin{aligned} W_s &= \bigcup_{j \in J} W_{s_j} \text{ und} \\ F_s &= \{ w_x(t)|_{T_x} \mid x \in W_s \}, \end{aligned}$$

so ist $s = (W_s, F_s)$ eine reale Situation. Es gilt:

$$s = \sup_{j \in J} s_j.$$

Dafür bleibt lediglich zu zeigen, dass s die kleinste aller realen Situationen ist, die die Menge aller s_j umfasst. Dies folgt aber direkt aus der Konstruktion von s. Denn zu jedem $x \in W_s$ und jedem $t \in T_x$ existiert eine Situation s_j so, dass $x \in W_{s_j}$ und $w_x(t)|_{T_x^j}$ in der entsprechenden Weltlinie definiert ist. Trifft also für eine Situation

$$s' = (W_{s'}, \{\, w_x(t)|_{T'_x} \mid x \in W_{s'} \,\})$$

die Bedingung $s_j \subseteq s'$ für alle $j \in J$ zu, so gilt für jedes Objekt $x \in W_s$: $T_x \subseteq T'_x$. Also ist $s \subseteq s'$. Demzufolge ist s das Supremum der Menge $\{\, s_j \mid j \in J \,\}$.

Kommen wir nun zum Infimum. Für eine konkrete Situation s_j und ein konkretes Objekt $x \in W_{s_j}$ sei T_x^j die Menge der Punkte, an denen die eingeschränkte Weltlinie $w_x(t)|_{T_x^j}$ definiert ist.

Sei $\operatorname{def} w_x(t)$ der Definitionsbereich der Weltlinie $w_x(t)$. Weiterhin gelte

$$M' = \Big\{\, x \in \bigcap_{j \in J} W_j \;\Big|\; \bigcap_{j \in J} T_x^j \cap \operatorname{def} w_x(t) = \emptyset \,\Big\}$$

und

$$W_s = \bigcap_{j \in J} W_j \setminus M'.$$

Zu jedem $x \in W_s$ sei

$$T_x = \bigcap_{j \in J} T_x^j.$$

Für jeden festen Zeitpunkt $t \in T_x$ ist der Wert aller eingeschränkter Weltlinien $w_x(t)|_{T_x^j}$ für alle Situationen s_j identisch (siehe Definition 2.4, Seite 21). Dieser ist auch der Wert der eingeschränkten Weltlinie $w_x(t)|_{T_x}$. Damit lässt sich die Situation

$$s = (W_s, F_s)$$

mit

$$F_s = \{\, w_x(t)|_{T_x} \mid x \in W_s \,\}$$

definieren. Dann gilt zunächst $s \in \mathfrak{S} \cup \{\, s_\emptyset \,\}$. Ist $W_s = \emptyset$, so auch F_s. Andernfalls gilt für jedes $x \in M$: $x \notin M'$, also $\bigcap_{j \in J} T_x^j \neq \emptyset$. Andererseits gilt auch

$$\bigcap_{j \in J} W_j \subseteq W.$$

Da alle eingeschränkten Weltlinien Einschränkungen der jeweiligen Weltlinien der Welt sind, trifft dies auch auf die Menge F_s zu.

Schließlich bleibt zu zeigen, dass die Situation s das Infimum von

$$\{\, s_j \mid j \in J \,\}$$

ist. Zunächst gilt aufgrund der Schnittbildung $s \subseteq s_j$ für alle $j \in J$. Ist $s = s_\emptyset$, so gilt diese Bedingung sogar für alle Situationen $s' \in \mathfrak{S}$. Sei nun $s \neq s_\emptyset$. Sei weiterhin $s' = (W_{s'}, F_{s'}) \in \mathfrak{S}$ eine beliebige Situation, so dass $s' \subseteq s_j$ für alle $j \in J$ gilt. Dann gilt für jedes $x \in W_{s'}$: $x \in W_j$ für alle $j \in J$, also auch $x \in W_s$. Für

$$F_{s'} = \{\, w_x(t)|_{T'_x} \mid x \in W_{s'} \,\}$$

gilt: $T'_x \subseteq T^j_x$ für alle $j \in J$. Demnach gilt auch $T'_x \subseteq T_x$. Also gilt $s' \subseteq s$. Somit ist $s = \inf\{\, s_j \mid j \in J \,\}$.

Also existiert zu jeder Menge S von Situationen sowohl ein Infimum $\inf S$, als auch ein Supremum $\sup S$ in $\mathfrak{S} \cup \{\, s_\emptyset \,\}$. Damit ist $\mathfrak{S} \cup \{\, s_\emptyset \,\}$ ein vollständiger Verband. □

Bemerkung 2.11. Wie auch schon im vorangegangenen Beweis werden wir auch weiterhin die Bezeichnungen

$$s_1 \cup s_2 := \sup\{\, s_1, s_2 \,\} \text{ und} \tag{2.9a}$$

$$s_1 \cap s_2 := \inf\{\, s_1, s_2 \,\} \tag{2.9b}$$

verwenden.

2.2 Eine Beispielwelt

Um im Folgenden ein anschauliches Beispiel parat zu haben, soll an dieser Stelle eine Scheibenwelt aus dem Bereich der Bauklötzer beschrieben werden.

Gegeben sei eine Tischplatte p, auf der drei Würfel w_1, w_2 und w_3 liegen. Dabei liegt Würfel w_1 auf w_2, welcher neben w_3 auf der Tischplatte liegt; w_2 und w_3 berühren sich. Die dadurch beschriebene Situation zur Zeit $t = 0$ entspricht Abbildung 2.1, Seite 26. Liegen die drei Würfel übereinander, so bilden sie einen Turm. Alle Würfel, Türme und die Tischplatte bilden zusammen die Menge W der Objekte dieser Welt.

Die Positionen in Raum und Zeit sollen hier der Einfachheit halber mit ganzzahligen Koordinaten angegeben werden. Dafür benutzen wir die Menge $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^2$; die x- und y-Koordinaten werden aus der Menge der ganzen Zahlen und die z-Koordinate und die Zeit t aus der Menge der natürlichen Zahlen gewählt.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ befindet sich Würfel w_1 an den Koordinaten $(3, 1, 2)$, Würfel w_2 auf $(3, 1, 1)$ und Würfel w_3 auf $(4, 1, 1)$. Da die Würfel alle gleich groß und stets achsenparallel angeordnet sein sollen, reicht es, die Koordinaten der vorderen

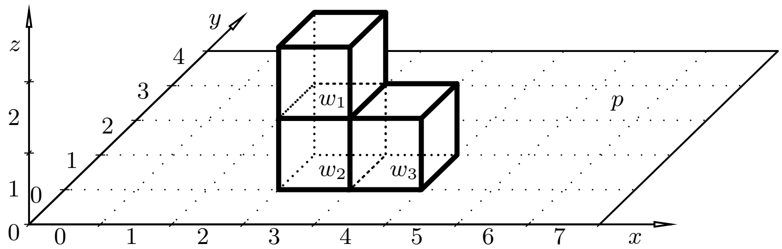


Abbildung 2.1: Eine Klötzchen-Welt

linken oberen Ecke anzugeben. Die Tischplatte habe eine Ausdehnung von $(0,0,0)$ bis nach $(7,4,0)$. Damit gehört jedes Element der Menge

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7\} \times \{0,1,2,3,4\} \times \{0\}$$

zu den Koordinaten der Tischplatte. Jedes Koordinatentripel steht hierbei für das Quadrat, dessen linke vordere Ecke es bezeichnet. Damit hat die Platte eine Ausdehnung von 8×6 Feldern.

Diese Situation (Welt zur Zeit $t_0 = 0$) bezeichnen wir mit s_1. Eine zweite Situation sei zur Zeit $t_1 = 3$ mit s_2 gegeben, welche sich von s_1 nur darin unterscheidet, dass jetzt w_1 nicht mehr auf w_2, sondern auf w_3 liegt, also die Koordinaten $(4,1,2)$ besitzt. Die vollständigen Ausschnitte aus den Weltlinien für die ersten acht Zeitpunkte unseres Beispiels sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Während des Zeitraums $\{4,5,6\}$ bilden die drei Würfel einen Turm.

Zeit	w_1	w_2	w_3	$w_{\text{Turm 1}}$
0	$(3,1,2)$	$(3,1,1)$	$(4,1,1)$	–
1	$(2,1,1)$	$(4,1,2)$	$(4,1,1)$	–
2	$(3,1,1)$	$(4,2,1)$	$(4,1,1)$	–
3	$(4,1,2)$	$(3,1,1)$	$(4,1,1)$	–
4	$(4,1,3)$	$(4,1,1)$	$(4,1,2)$	$(4,1,1,3)$
5	$(4,1,3)$	$(4,1,1)$	$(4,1,2)$	$(4,1,1,3)$
6	$(4,2,3)$	$(4,2,1)$	$(4,2,2)$	$(4,2,1,3)$
7	$(3,2,1)$	$(5,2,1)$	$(5,3,1)$	–
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabelle 2.1: Weltlinien der Würfel und eines Turmes der Beispielwelt für die Zeiten von $t = 0$ bis $t = 7$

Damit lässt sich nun aus den beiden statischen Situationen s_1 und s_2 eine dynamische Situation s_3 bilden. Diese erstreckt sich aber nicht zwangsläufig über einen zusammenhängenden Zeitraum. Zwischen t_0 und t_1 kann eine zeitliche „Lücke“ existieren, in der beispielsweise w_1 transportiert wird oder andere Zustände eingetreten sein können, was für dieses Beispiel auch zutrifft.

Jeder Würfel benötigt eine Unterlage. Das bedeutet, dass sich die Tischplatte unterhalb eines jeden Würfels befinden muss. Doch zuerst sollten wir einige Relationen auf W definieren:

Ein Objekt o_1 mit den Koordinaten $\big(x_1(t), y_1(t), z_1(t)\big)$ befindet sich genau dann zum Zeitpunkt t *auf* einem anderen Objekt o_2, wenn zum gleichen Zeitpunkt o_2 die Koordinaten $\big(x_2(t), y_2(t), z_2(t)\big)$ besitzt, und

$$z_1(t) = z_2(t) + 1, \text{ sowie } x_1(t) = x_2(t) \text{ und } y_1(t) = y_2(t)$$

gelten. In diesem Falle befindet sich o_2 *unter* o_1. Gilt $z_1(t) = z_2(t)$, so befindet sich o_1 *neben* o_2. o_1 befindet sich *oberhalb* von o_2, wenn außer $x_1(t) = x_2(t)$ und $y_1(t) = y_2(t)$ für ein Paar $\big(x_2(t), y_2(t)\big)$ noch $z_1(t) > z_2(t)$ gilt. In diesem Fall ist o_2 *unterhalb* von o_1. o_1 und o_2 *berühren* sich, wenn gilt

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)| + |z_1(t) - z_2(t)| = 1. \tag{2.10}$$

Schließlich befindet sich noch ein Objekt o_3 zum Zeitpunkt t mit den Koordinaten $\big(x_3(t), y_3(t), z_3(t)\big)$ *zwischen* o_1 und o_2, wenn es eine positive reelle Zahl a gibt, so dass gilt:

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_3(t) &= a\big(x_3(t) - x_2(t)\big), \\ y_1(t) - y_3(t) &= a\big(y_3(t) - y_2(t)\big) \text{ und} \\ z_1(t) - z_3(t) &= a\big(z_3(t) - z_2(t)\big). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Für die bisher beschriebenen Beziehungen reicht es aus, wenn die entsprechenden Zusammenhänge für jeweils ein Koordinatentripel der Objekte gelten.

Nach der Geometrie nun zur Physik: Wo ein Körper ist, kann gleichzeitig kein anderer sein. Also müssen die Mengen der Koordinatentripel aller Körper disjunkt sein. Für Würfel bedeutet dies:

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)| + |z_1(t) - z_2(t)| \geq 1.$$

Außerdem gilt die Gravitation für die Würfel: Unter jedem Würfel muss sich ein anderes Objekt befinden. Die Tischplatte ist per definitionem auf der untersten Koordinate und bildet die Oberfläche einer Scheibenwelt, auf der sich die Würfel befinden. Würfel können sich während einer Zeitdifferenz von einer Zeiteinheit um genau ein Feld horizontal und/oder vertikal aufwärts bewegen:

$$\max\{\,|x_1(t) - x_1(t+1)|, |y_1(t) - y_1(t+1)|, |z_1(t) - z_1(t+1)|\,\} = 1.$$

Die einzige Ausnahme besteht, falls sich unter dem Zielpunkt des Würfels zur Zeit $t + 1$ kein weiteres Objekt befindet. Dann „fällt“ er soweit nach unten, bis er wieder auf einer Unterlage steht. Diese ist entweder ein anderer Würfel oder die Tischplatte. Damit brauchen wir uns nur mit dem achsenparallelen Raum-Quader zu befassen, der durch die beiden Punkte $(0, 0, 0)$ und $(7, 4, 3)$ aufgespannt wird, da der Rest unserer Welt konstant leer bleibt.

Da Welten typischerweise abgeschlossene Systeme sind, können auch keine Objekte vollständig verschwinden. Lediglich eine Zerlegung in vorher schon existierende Bausteine ist möglich.

2.3 Elementare Infone und ihre Darstellung

2.3.1 Infondarstellung

In den Bildern, Klängen und Empfindungen, die der Mensch hat, sind viele Informationen verborgen. Doch die meisten davon können wir nicht direkt nutzen. Sie sind für die direkte Verarbeitung viel zu komplex. Um damit zu arbeiten, müssen sie erst in eine sprachliche Form gebracht werden, wie: „Dieses Buch ist älter als jenes.“ oder „Dieser Baum ist 20 Meter hoch.“ Diese Übersetzung wird *Digitalisierung* genannt (siehe auch Devlin 1993, Seiten 29–34).[1]

Zur Speicherung und Verarbeitung von digitalisierter Informationen werden diese geeignet durch ein Muster (zum Beispiel Buchstaben auf Papier, Strukturen in Gehirnen, Elektronenkonfigurationen in Schaltkreisen und vieles mehr) dargestellt. Neben dieser *Darstellung*, die hier mit D bezeichnet werden soll, verwenden wir immer eine so genannte *Bindung* B, also eine „Lesevorschrift“ (siehe auch Kapitel 2.5, Seite 63), die dieses mit der entsprechenden Information verbindet.

Das Paar $\langle D, B\rangle$ wird als der so genannte *Informationsgehalt* bezeichnet. Bezeichnen zwei Informationsgehalte $\langle D, B\rangle$ und $\langle D', B'\rangle$ dieselbe Information, so soll dies mit Hilfe einer Relation $\approx$ ausgedrückt werden. Diese Relation stellt optimalerweise eine Äquivalenzrelation dar. Ihre Restklassen $[\langle D, B\rangle]_\approx$ sind nun das, was man sich inhaltlich unter Infonen vorstellen kann: Informationen, die unabhängig von ihrer Darstellung sind.

Wir werden uns im Weiteren mit einer speziellen Darstellungsweise für Infone befassen. Ausgangspunkt dafür werden so genannte Relationen sein.

Definition 2.12. Sei $\mathfrak{G}$ eine Menge, deren Elemente *Grundtypen* genannt werden. Weiterhin sei $\mathfrak{R}$ eine Menge von *Relationssymbolen*, wobei jedem $R \in \mathfrak{R}$ eine Stelligkeit $n \in \mathbb{N}_0$ und n Stellen mit den Bezeichnungen $s_1, \ldots, s_n$ und je einem Grundtypen $G_1, \ldots, G_n \in \mathfrak{G}$ zugeordnet seien. Dann wird das geordnete Paar $\Sigma = (\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$ *Signatur* genannt. ◊

[1] Das bezieht sich unter anderem auf (Dretske 1981, Seiten 135–141).

Bemerkung 2.13. Jedem Grundtyp G sei eine nicht leere *Datenmenge* D_G und eine dazu disjunkte nicht leere *Parametermenge* V_G zugeordnet. Im Folgenden werden Elemente der Datenmengen mit a, b, ... und Elemente der Parametermengen mit $\dot{a}$, $\dot{b}$, ... bezeichnet.

Definition 2.14. Sei $G \in \mathfrak{G}$ ein Grundtyp. Seien weiterhin $D_T \subseteq D_G$ und $V_T \subseteq V_G$ beliebig gewählt. Dann heißt T *Teiltyp* von G $(T : G)$. Die Menge aller Teiltypen zum Typ G wird mit $\mathfrak{T}_G$ bezeichnet.

$$\mathfrak{T}(\Sigma) := \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} \mathfrak{T}_G \tag{2.12}$$

heißt *Menge aller Typen* zur Signatur Σ.

Gelten $T_1 : T_2$ und $T_2 : T_1$, so heißen beide Typen *syntaktisch gleich*. Dafür wird die Schreibweise $T_1 \doteq T_2$ reserviert. ♢

Definition 2.15. Sei T ein Typ. Die Tatsache $x \in D_T$, also dass ein Argument x vom Typ T ist, wird mittels einer *parametrischen Aussage* der Form

$$x : T \tag{2.13}$$

ausgedrückt. Analog wird auch $\dot{x} \in V_T$ mit Hilfe von

$$\dot{x} : T \tag{2.14}$$

dargestellt. ♢

REL^n	Typ einer n-stelligen Relation,
SIT	Typ einer Situation,
IND	Typ eines Individuums,
INF	Typ eines Infons,
TYP	Typ eines Typs,
PAR	Typ eines Parameters,
LOC	Typ einer räumlichen Lokalisierung,
TIM	Typ einer zeitlichen Lokalisierung und
POL	Typ einer Polarität.

Tabelle 2.2: In (Devlin 1993) verwendete Typen

Bemerkung 2.16. Keith Devlin verwendet die Grundtypen aus Tabelle 2.2 (Seite 29). Dabei sind für ihn räumliche und zeitliche Lokalisierungen Punkte oder Gebiete in der Raumzeit. Dies könnte etwa so aussehen:

Eine *zeitliche Lokalisierung* $t \subseteq \mathbb{R}$ ist eine endliche Vereinigung von Intervallen reeller Zahlen oder ein spezielles Element „Unbestimmt“ u_t. Die Menge der zeitlichen Lokalisierungen bezeichnen wir im Weiteren mit D_{TIM}. Entsprechend soll $\dot{t} \in V_{TIM}$ einen zeitlichen Parameter bezeichnen.

Eine *räumliche Lokalisierung* l ist ein spezielles Element „Unbestimmt“ u_l oder eine Abbildung $l : t \rightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$, falls $t \subseteq \mathbb{R}$, oder eine konstante Menge $l \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$, falls $t = u_t$. Die Menge der räumlichen Lokalisierungen bezeichnen wir im Weiteren mit D_{LOC} und die der entsprechenden Parameter $\dot{l}$ mit V_{LOC}.

Die *Überlappung zweier räumlicher Lokalisierungen* l und l' wird mit $l \circ l'$ bezeichnet. Analog steht $t \circ t'$ für eine *zeitliche Überlappung*. Eine Überlappung ist hierbei gegeben, wenn $l \cap l' \neq \emptyset$ beziehungsweise $t \cap t' \neq \emptyset$.

Mit $t \prec t'$ wird die Tatsache ausdrückt, dass t zeitlich vor t' liegt. Genauer: jeder Zeitpunkt aus t liegt zeitlich vor allen Zeitpunkten aus t'.

Beispiel 2.17. Betrachten wir nun das Beispiel aus Abschnitt 2.2, Seite 25.

IND	K (Körper)	P (Tischplatte) W (Würfel) TU (Turm)
TIM		
LOC		
REL^n	REL^1 REL^2 REL^3 REL^4	
TYP		
INF		
POL		
SIT		

Tabelle 2.3: Typen zur Klötzchenwelt

Orientiert man sich an der KEITH DEVLIN-schen Typisierung, so treten hier unter anderem die Typen aus Tabelle 2.3 (Seite 30) auf. Dabei existiert die folgende Halbordnung auf den Typen: Typen, die weiter rechts stehen, sind spezieller, also Teiltypen von denen, die weiter links stehen. Zu jedem dieser Typen T existiert eine Datenmenge D_T. Beispiele dazu werden in Tabelle 2.4 (Seite 31) zusammengefasst.

In den folgenden Beispielen werden wir nur Relationen über den Typen IND, TIM und LOC betrachten. Will man weitere Typen aus Tabelle 2.3 hinzunehmen, so wird eine eine allgemeinere Logik notwendig – zum Beispiel eine Art Stufenlogik, wie sie zur Prädikatenlogik existiert.

$$
\begin{aligned}
D_P &= \{\, p \,\} \\
D_W &= \{\, w_1, w_2, w_3 \,\} \\
D_{TU} &= \{\, w_{\text{Turm 1}} \,\} \\
D_K &= D_P \cup D_W \cup D_{TU} \\
D_{IND} &= D_K \\
D_{REL^1} &= \{\, \text{ist\_vom\_Typ\_}P, \text{ist\_vom\_Typ\_}W, \\
&\qquad \text{ist\_vom\_Typ\_}K, \text{ist\_vom\_Typ\_}IND, \\
&\qquad \text{ist\_vom\_Typ\_}REL^1, \text{ist\_vom\_Typ\_}REL^2, \\
&\qquad \text{ist\_vom\_Typ\_}REL^3, \text{ist\_vom\_Typ\_}REL^n, \\
&\qquad \text{ist\_vom\_Typ\_}TYP \,\} \\
D_{REL^2} &= \{\, \text{ist\_vom\_Typ} \,\} \\
D_{REL^3} &= \{\, \text{auf}, \text{unter}, \text{neben}, \text{berührt}, \text{oberhalb}, \text{unterhalb} \,\} \\
D_{REL^4} &= \{\, \text{zwischen} \,\} \\
D_{REL^n} &= D_{REL^1} \cup D_{REL^2} \cup D_{REL^3} \cup D_{REL^4} \\
D_{TYP} &= \{\, P, W, K, IND, REL^1 REL^2, REL^3, REL^n, TYP \,\}
\end{aligned}
$$

Tabelle 2.4: Datenmengen für die Klötzchenwelt

Definition 2.18. Seien $R \in \mathfrak{R}$ eine n-stellige Relation und D_1, …, D_n geeignete Datenmengen zu den Typen der Stellen mit den Namen s_1 bis s_n der Relation. Seien weiterhin V_1, …, V_n dazu passende Parametermengen und

$$a_1 \in D_1 \cup V_1, \ldots, a_n \in D_n \cup V_n$$

Argumente mit geeigneter Typisierung für die Stellen mit den Bezeichnungen s_1, …, s_n. Dann heißt ein $n+3$-Tupel

$$\underline{\sigma} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle \tag{2.15}$$

mit $i \in \{\, 0, 1 \,\}$ eine elementare *Infondarstellung*. i wird *Polarität* genannt.

Gilt $a_1 \in D_1$, …, $a_n \in D_n$, so heißt $\underline{\sigma}$ eine *elementare, parameterfreie Infondarstellung*, anderenfalls eine *elementare, parametrische Infondarstellung*.

Die Menge aller Infondarstellungen einer Signatur Σ wird mit $\mathfrak{I}_d(\Sigma)$ bezeichnet.

Die Menge der Individuen einer Infondarstellung σ wird mit

$$\mathrm{Obj}(\underline{\sigma}) := \{\, a_j \mid \underline{\sigma} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle, 1 \leq j \leq n \,\} \cap D_{IND} \tag{2.16}$$

bezeichnet.

Analog bezeichnet

$$\mathrm{Obj}(I) := \bigcup_{\underline{\sigma} \in I} \mathrm{Obj}(\underline{\sigma}) \tag{2.17}$$

die Menge der Individuen einer Menge $I \subseteq \mathfrak{I}_d(\Sigma)$ von Infondarstellungen. ◊

Bemerkung 2.19. Die Reihenfolge der Schreibweise der Argumente in Infondarstellungen ist bei Keith Devlin nicht festgelegt. Die Zuordnung der Argumente zu den Stellen erfolgt (ähnlich wie zum Beispiel bei relationalen Datenbanken) über die Bezeichnung der Stellen. Wenn sie offensichtlich ist, wird die Infondarstellung auch häufig in der Form $\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, t, i \rangle\!\rangle$ geschrieben.

Beispiel 2.20. Mit den Grundtypen und Datenmengen aus Beispiel 2.17, Seite 30, lassen sich nun sehr viele elementare Infondarstellungen bilden. Einige wenige wurden in Tabelle 2.5 auf Seite 33 zusammengestellt. Dabei wurden die Polaritäten willkürlich gewählt. Man hätte genauso gut für jede 1 eine 0 und andersherum wählen können. Die Infondarstellungen $\underline{\sigma}_1$ bis $\underline{\sigma}_{16}$ sind hierbei elementar und parameterfrei. Demgegenüber handelt es sich bei $\underline{\sigma}_{17}$ um eine elementare parametrische Infondarstellung.

Bemerkung 2.21. Die Definitionsbereiche D_j der einzelnen Argumente können (und werden sehr häufig) einen Wert „unbestimmt“ u_j enthalten. Welche das sind, hängt von der Signatur ab. Sie werden meist nicht mit notiert. Zum Umgang mit ihnen sei hier auf Abschnitt 2.4.2 ab Seite 59 verwiesen; insbesondere auf Bemerkung 2.77 (Seite 60).

Definition 2.22. Eine Infondarstellung

$$\langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle$$

heißt *saturiert*, wenn keine ihrer Argumentstellen mit einem unbestimmten Argument besetzt ist. Andernfalls heißt sie *unsaturiert*. ◊

Definition 2.23. Sei $\underline{\sigma} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle$ eine Infondarstellung. Die *duale Infondarstellung* $\overline{\underline{\sigma}}$ wird definiert durch:

$$\overline{\underline{\sigma}} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, 1 - i \rangle\!\rangle. \tag{2.18}$$

◊

$$\begin{aligned}
\underline{\sigma}_1 &= \langle\!\langle \text{ist_vom_Typ_}W, w_1, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_2 &= \langle\!\langle \text{ist_vom_Typ_}W, w_1, 0 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_3 &= \langle\!\langle \text{ist_vom_Typ_}W, w_2, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_4 &= \langle\!\langle \text{ist_vom_Typ_}W, w_3, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_5 &= \langle\!\langle \text{ist_vom_Typ_}P, p, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_6 &= \langle\!\langle \text{ist_vom_Typ_}P, p, 0 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_7 &= \langle\!\langle \text{ist_vom_Typ_}P, w_1, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_8 &= \langle\!\langle \text{ist_vom_Typ_}P, w_1, 0 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_9 &= \langle\!\langle \text{auf}, \textit{oben} \rightsquigarrow w_1, \textit{unten} \rightsquigarrow w_2, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_{10} &= \langle\!\langle \text{auf}, \textit{oben} \rightsquigarrow w_1, \textit{unten} \rightsquigarrow w_2, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 0 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_{11} &= \langle\!\langle \text{auf}, \textit{oben} \rightsquigarrow w_1, \textit{unten} \rightsquigarrow p, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 0 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_{12} &= \langle\!\langle \text{auf}, \textit{oben} \rightsquigarrow w_2, \textit{unten} \rightsquigarrow p, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_{13} &= \langle\!\langle \text{auf}, \textit{oben} \rightsquigarrow w_3, \textit{unten} \rightsquigarrow p, \textit{Zeit} \rightsquigarrow 33, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_{14} &= \langle\!\langle \text{neben}, \textit{Objekt}_1 \rightsquigarrow w_2, \textit{Objekt}_2 \rightsquigarrow w_3, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_{15} &= \langle\!\langle \text{zwischen}, \textit{außen}_1 \rightsquigarrow w_1, \textit{Mitte} \rightsquigarrow p, \textit{außen}_2 \rightsquigarrow w_2, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_{16} &= \langle\!\langle \text{oberhalb}, \textit{oben} \rightsquigarrow w_1, \textit{unten} \rightsquigarrow p, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle \\
\underline{\sigma}_{17} &= \langle\!\langle \text{ist_vom_Typ_}P, \dot{p}, 1 \rangle\!\rangle
\end{aligned}$$

Tabelle 2.5: Einige Infondarstellungen zur Klötzchenwelt

Folgerung 2.24. *Für die duale Infondarstellung $\underline{\sigma}_2 = \overline{\underline{\sigma}}_1$ zu $\underline{\sigma}_1$ gilt:*

$$\overline{\underline{\sigma}}_2 = \underline{\sigma}_1. \tag{2.19}$$

Beweis. Die Aussage folgt, wenn man die Gleichung $1 - (1 - i) = i$ auf (2.18) anwendet. □

2.3.2 Infon und Akzeptanz

Definition 2.25. Seien $\Sigma = (\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$ eine Signatur und D_G für $G \in \mathfrak{G}$ die zugeordneten Datenmengen zu den Relationen aus $\mathfrak{R}$. Weiterhin sei $w = (W, F)$ eine Welt, E die Menge aller Eigenschaften, zu denen Eigenschaftsfunktionen $w_x^e(t)$ in den Weltlinien $w_x(t) \in F$ existieren, und zu jeder Eigenschaft $e \in E$ sei D_e der Wertebereich der Eigenschaftsfunktionen $w_x^e(t)$ für $x \in W$.

Eine partiell definierte Funktion

$$\mathbb{I}^I : \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} (D_G \cup V_G) \to W \cup T \cup \bigcup_{e \in E} D_e \cup \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} V_G, \tag{2.20}$$

heißt *Interpretation der Individuen* der Signatur Σ, falls insbesondere gilt:

$$\{\, \mathbb{I}^I(a) \mid a \in D_{TIM} \,\} \subseteq T, \tag{2.21}$$

$$\mathbb{I}^I(\dot{p}) = \dot{p} \text{ für alle } \dot{p} \in \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} V_G \text{ und:} \tag{2.22}$$

$$\text{ist } a = \text{„unbestimmt“, so bleibt auch } \mathbb{I}^I(a) \text{ undefiniert.} \tag{2.23}$$

Sei die partiell definierte Funktion $\mathbb{I}^R$ definiert durch

$$\mathbb{I}^R : \mathfrak{R} \to \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0 \\ e_j \in E}} \mathfrak{P}\Big(\big(W \times D_{e^1_1} \times \cdots \times D_{e^1_{k_1}}\big) \times \cdots \\ \cdots \times \big(W \times D_{e^m_1} \times \cdots \times D_{e^m_{k_m}}\big) \times T\Big), \tag{2.24}$$

wobei jeder Stelle s von R ein Paar (j_s, k_s) so zugeordnet ist, dass

$$\mathbb{I}^I(D_s) \subseteq D_{e^{j_s}_{k_s}} \text{ für } k_s \neq 0, \tag{2.25}$$

beziehungsweise

$$\mathbb{I}^I(D_s) \subseteq W \text{ für } k_s = 0 \tag{2.26}$$

gilt, und für jedes $j \in \{\, 1, \ldots, m \,\}$ ein s mit $j_s = j$ und $k_s = 0$ existiert. Dann heißt die Abbildung $\mathbb{I}^R(R)$ *Interpretation der Relation R*.

Für eine Infondarstellung $\underline{\sigma} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle$ bezeichnet

$$\mathbb{I}^T(\underline{\sigma}) := \big((x^1_0, \ldots, x^1_{k_1}), \ldots, (x^m_0, \ldots, x^m_{k_m}), \mathbb{I}^I(t)\big) \tag{2.27}$$

die *Interpretation der Darstellung*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für jedes $j \in \{\, 1, \ldots, m \,\}$ existiert eine Stelle s, so dass $j_s = j$ und $k_s = 0$.
2. für alle Stellen s gilt:
$$x^{j_s}_{k_s} = \mathbb{I}^I(a_s), \tag{2.28}$$

3. Für alle sonstigen x_k^j gilt:

$$\begin{aligned} &x_k^j \text{ bleibt undefiniert, falls } x_0^k \text{ Parameter ist,} \\ &x_k^j = w_{x_0^k}^{e_k^j}(t), \text{ andernfalls.} \end{aligned} \tag{2.29}$$

Das Tripel $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$ heißt *Interpretation* zur Signatur Σ. $\Diamond$

Beispiel 2.26. Auch für unser Beispiel aus Kapitel 2.2 brauchen wir eine geeignete Interpretation $\mathbb{I}$. Ein Auszug daraus wird auf den nächsten Zeilen beschrieben.

Für die Interpretation der Individuen gelten

$$\mathbb{I}^I(w_1) = w_1, \mathbb{I}^I(w_2) = w_2, \mathbb{I}^I(w_3) = w_3,$$
$$\mathbb{I}^I(w_{\text{Turm 1}}) = w_{\text{Turm 1}}, \mathbb{I}^I(p) = p \text{ und } \mathbb{I}^I(t) = t.$$

Die Relationen auf und unter werden folgendermaßen interpretiert:

$$\big((a, x_a, y_a, z_a), (b, x_b, y_b, z_b), t\big) \in \mathbb{I}^R(\text{auf}) \text{ und}$$
$$\big((b, x_b, y_b, z_b), (a, x_a, y_a, z_a), t\big) \in \mathbb{I}^R(\text{unter})$$

genau dann, wenn a und b Würfel sind und es gilt

$$x_a(t) = x_b(t),\ y_a(t) = y_b(t) \text{ und } z_b(t) = 1 + z_a(t),$$

oder wenn a eine Tischplatte und b ein Würfel ist und es gilt

$$x_a(t) \leq x_b(t) \leq x_a(t) + 7,\ y_a(t) \leq y_b(t) \leq y_a + 5 \text{ und } z_b(t) = 1 + z_a(t),$$

oder wenn a ein Würfel ist und b eine Tischplatte und die Bedingung

$$x_b(t) \leq x_a(t) \leq x_b(t) + 7,\ y_b(t) \leq y_a(t) \leq y_b + 5 \text{ und } z_b(t) = 1 + z_a(t),$$

zutrifft. Hier bezeichnen x_a und y_a die linke vordere Ecke der Tischplatte.

Die passende Tupelinterpretation lautet:

$$\begin{aligned} &\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{auf}, \textit{oben} \rightsquigarrow a, \textit{unten} \rightsquigarrow b, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle\big) = \\ &\qquad\Bigg(\Big(\mathbb{I}^I(a), w^x_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \\ &\qquad\qquad\Big(\mathbb{I}^I(b), w^x_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \mathbb{I}^I(t)\Bigg), \\ &\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{unter}, \textit{unten} \rightsquigarrow a, \textit{oben} \rightsquigarrow b, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle\big) = \\ &\qquad\Bigg(\Big(\mathbb{I}^I(a), w^x_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \\ &\qquad\qquad\Big(\mathbb{I}^I(b), w^x_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \mathbb{I}^I(t)\Bigg). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die anderen Relationen:

$$\mathbb{I}^R(\text{ist\_vom\_Typ\_W}) = \{\, w_1, w_2, w_3 \,\},$$
$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_W}, \textit{Objekt} \rightsquigarrow a, i \rangle\!\rangle\big) = \big(\mathbb{I}^I(a)\big),$$
$$\mathbb{I}^R(\text{ist\_vom\_Typ\_W}) = \{\, p \,\},$$
$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_W}, \textit{Objekt} \rightsquigarrow a, i \rangle\!\rangle\big) = \big(\mathbb{I}^I(a)\big),$$
$$\mathbb{I}^R(\text{neben}) = \Big\{ \big((a, z_a(t)), (b, z_b(t)), t\big) \;\Big|\; z_a(t) = z_b(t) \Big\},$$

$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{neben}, \textit{Objekt}_1 \rightsquigarrow a, \textit{Objekt}_2 \rightsquigarrow b, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle\big) = \\ = \bigg(\Big(\mathbb{I}^I(a), w^z_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \Big(\mathbb{I}^I(b), w^z_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \mathbb{I}^I(t)\bigg),$$

$$\mathbb{I}^R(\text{zwischen}) = \Big\{ \big((a, x_a, y_a, z_a), (b, x_b, y_b, z_b), (c, x_c, y_c, z_c), t\big) \;\Big| \\ b \text{ ist zum Zeitpunkt } t \text{ zwischen } a \text{ und } c \Big\},$$

$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{zwischen}, \textit{außen}_1 \rightsquigarrow a, \textit{Mitte} \rightsquigarrow b, \textit{außen}_2 \rightsquigarrow c, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle\big) = \\ \bigg(\Big(\mathbb{I}^I(a), w^x_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \\ \Big(\mathbb{I}^I(b), w^x_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \\ \Big(\mathbb{I}^I(c), w^x_{\mathbb{I}^I(c)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(c)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(c)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \mathbb{I}^I(t)\bigg),$$

$$\mathbb{I}^R(\text{oberhalb}) = \{\, \big((a, x_a, y_a, z_a), (b, x_b, y_b, z_b), t\big) \mid \\ a \text{ ist zum Zeitpunkt } t \text{ oberhalb von } b \,\},$$

$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{oberhalb}, \textit{oben}_1 \rightsquigarrow a, \textit{unten}_2 \rightsquigarrow b, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle\big) = \\ = \bigg(\Big(\mathbb{I}^I(a), w^x_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \\ \Big(\mathbb{I}^I(b), w^x_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \mathbb{I}^I(t)\bigg).$$

Für die verbalen Beschreibungen von $\mathbb{I}^R(\text{zwischen})$ und $\mathbb{I}^R(\text{oberhalb})$ kann die formale Beschreibung mittels Koordinaten-Beziehungen in Kapitel 2.2 (genauer im Abschnitt über die Relationen ab Seite 27) nachgelesen werden.

Bei den Relationen $\text{ist\_vom\_Typ\_}W$ und $\text{ist\_vom\_Typ\_}P$ wurde hier bewusst die Zeit weggelassen, da ihre Gültigkeit unabhängig von der Zeit t ist.

Definition 2.27. Sei $\Sigma = (\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$ eine Signatur und $w = (W, F)$ eine Welt. Ferner sei

$$\underline{\sigma} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, t', i \rangle\!\rangle$$

eine Infondarstellung und $\mathbb{I}$ eine geeignete Interpretation.

Eine Situation $s = (W_s, \{\, w_x(t)|_{T_x} \mid x \in W_s \,\}) \in \mathfrak{S}$ *akzeptiert* die Infondarstellung $\underline{\sigma}$ bezüglich der Interpretation $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Für saturierte Infondarstellungen:

1. es gilt: $i = 1$ genau dann, wenn

$$\mathbb{I}^T(\underline{\sigma}) \in \mathbb{I}^R(R), \tag{2.30}$$

$$\mathbb{I}^T(\underline{\sigma}) = \Big(\big(x_0^1, w^{e_1^1}_{x_0^1}(t)|_{T_{x_0^1}}, \ldots, w^{e_{k_1}^1}_{x_0^1}(t)|_{T_{x_0^1}}\big), \ldots \\ \ldots, \big(x_0^m, w^{e_1^m}_{x_0^m}(t)|_{T_{x_0^m}}, \ldots, w^{e_{k_m}^m}_{x_0^m}(t)|_{T_{x_0^m}}\big), t \Big) \tag{2.31}$$

für $t = \mathbb{I}^I(t')$ und alle diese $w^{e_{k_j}^j}_{x_0^j}(t)|_{T_{x_0^j}}$ in der Situation s definiert sind, und

2. es gilt bei Bezeichnung entsprechend Definition 2.25 mit

$$\text{Obj}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle) := \{\, x_k^j \mid j \in \{\, 1, \ldots, m \,\}, k \in \{\, 0, \ldots, k_j \,\} \,\} \cap W \tag{2.32}$$

die Beziehung

$$\text{Obj}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle) \subseteq \text{Obj}(s). \tag{2.33}$$

Für unsaturierte Infondarstellungen gelten die Bedingungen für saturierte Infondarstellungen ebenfalls. Hierbei wird für jede unbestimmte Stelle s_j, wenn möglich, ein Element aus der entsprechenden Wertemenge in der Situation s so gewählt, dass sich ein Tupel der Relation $\mathbb{I}^R(R)$ ergibt. Ist dies möglich, so wird der Informationsgehalt genau dann akzeptiert, wenn die Polarität $i = 1$ ist; anderenfalls wird es genau dann akzeptiert, wenn $i = 0$ ist.

Hierfür wird die Notation $s \vDash \langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$ reserviert. Das Paar $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$ wird auch *Informationsgehalt* von $\underline{\sigma}$ bezüglich der Interpretation $\mathbb{I}$ genannt.

Die Menge $\mathrm{Obj}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle)$ heißt *Menge der Objekte* und

$$\mathrm{Act}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle) := \{ x_k^0 \mid j = 1, \ldots, m \} \tag{2.34}$$

Menge der aktiven Objekte von $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$. ♢

Folgerung 2.28. *Gilt* $s \vDash \langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$, *so folgt* $s \nvDash \langle \overline{\underline{\sigma}}, \mathbb{I} \rangle$.

Beweis. Dies folgt aus Punkt 1 von Definition 2.27 (Seite 37). □

Beispiel 2.29. Wenden wir uns nun wieder Abschnitt 2.2 von Seite 25 und dem dortigen Beispiel zu. Einige Informationsgehalte, welche von unserer Situation s_1 akzeptiert werden, wurden in Tabelle 2.6, welche auf Seite 38 zu finden ist, zusammengestellt. Dabei wurde für die Interpretation Beispiel 2.26 (Seite 35) zugrunde gelegt.

$$
\begin{aligned}
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{ist\_vom\_Typ\_}W, w_1, 1)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{ist\_vom\_Typ\_}W, w_2, 1)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{ist\_vom\_Typ\_}W, w_3, 1)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{ist\_vom\_Typ\_}P, p, 1)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{ist\_vom\_Typ\_}P, w_1, 0)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 0)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_2, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_3, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{neben}, \mathit{Objekt}_1 \rightsquigarrow w_2, \mathit{Objekt}_2 \rightsquigarrow w_3, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{zwischen}, \mathit{außen}_1 \rightsquigarrow w_1, \mathit{Mitte} \rightsquigarrow w_2, \mathit{außen}_2 \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1)\!), \mathbb{I} \rangle \\
&s_1 \vDash \langle (\!(\mathrm{oberhalb}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1)\!), \mathbb{I} \rangle
\end{aligned}
$$

Tabelle 2.6: Informationsgehalte, die von s_1 akzeptiert werden

Definition 2.30. Seien Σ_1 und Σ_2 zwei Signaturen, $w = (W, F)$ eine Welt und $\mathbb{I}_1$ und $\mathbb{I}_2$ zwei Interpretationen zu diesen Signaturen in die Welt w. Zwei Informationsgehalte

$$\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle = \langle \langle\!\langle R_1, s_1^1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n^1 \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_1, i_1 \rangle\!\rangle, (\mathbb{I}_1^I, \mathbb{I}_1^R, \mathbb{I}_1^T) \rangle$$

und

$$\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle = \langle \langle\!\langle R_2, s_1^2 \rightsquigarrow b_1, \ldots, s_n^2 \rightsquigarrow b_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_2, i_2 \rangle\!\rangle, (\mathbb{I}_2^I, \mathbb{I}_2^R, \mathbb{I}_2^T) \rangle$$

heißen *äquivalent*, wenn eine Permutation π der Form

$$\pi\big((x_0^1, \ldots, x_{k_1}^1), \ldots, (x_0^m, \ldots, x_{k_m}^m)\big) = \big((x_0^{\pi(1)}, \ldots, x_{k_{\pi(1)}}^{\pi(1)}), \ldots, (x_0^{\pi(m)}, \ldots, x_{k_{\pi(m)}}^{\pi(m)})\big) \tag{2.35}$$

auf der Menge der (Teil-)Tupel von $\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)$ so existiert, dass die folgenden Bedingungen gelten:

1. $\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)$ und $i_1 = i_2$ oder

   $$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \Big(\pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)\Big)^{\complement}$$

   das mengentheoretische Komplement von $\pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)$ bezüglich der Objekte und Eigenschaftswerte der Welt und $i_1 = 1 - i_2$ ist,

2. $\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\sigma_2)\big)$ gilt und

3. für Parameter $\dot{a}_k$ und $\dot{b}_j$ mit $\dot{a}_k \in D_{G_k^1}$ und $\dot{b}_j \in D_{G_j^2}$, die von $\mathbb{I}_1^T$ und $\pi \circ \mathbb{I}_2^T$ derselben Stelle zugeordnet werden, das heißt falls bei Bezeichnung entsprechend (2.27)

   $$\dot{a} = x_{l(k)}^o(k), \dot{p} = x_{l'(j)}^{\pi(o'(j))}, o(k) = \pi(o'(j)) \text{ und } l(k) = l'(k)$$

   erfüllt sind, gelten:

   $$\{\, \mathbb{I}_1^I(a) \mid a \in D_{G_k^1} \,\} = \{\, \mathbb{I}_2^I(b) \mid b \in D_{G_j^2} \,\} \text{ und } \dot{a}_k = \dot{b}_j. \tag{2.36}$$

4. für unsaturierte Infondarstellungen $i_1 = i_2$ gilt, und für jede unbestimmte Stelle $s_{k'}$ vom Typ $T_{k'}$ der Infondarstellung $\underline{\sigma}_1$ ein Parameter $\dot{c}_{k'} : T_{k'}$ existiert, der weder in $\underline{\sigma}_1$, noch in $\underline{\sigma}_2$ vorkommt, noch gleich zu einem anderen

Parameter $\dot{c}_{k''}$ zu einer anderen Stelle $s_{k''}$ $(k' \neq k'')$ ist, so dass zu der Infondarstellung $\underline{\sigma}'_1$, die entsteht, indem man in $\underline{\sigma}_1$ die Stellen $s_{k'}$ mit dem zugehörigen Parameter $\dot{c}_{k'}$ besetzt, eine Infondarstellung $\underline{\sigma}'_2$ mit

$$\langle \underline{\sigma}'_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}'_2, \mathbb{I}_2 \rangle \tag{2.37}$$

existiert, die durch Einsetzen derselben Parameter $\dot{c}_{k'}$ an die unbestimmten Stellen $s'_{j'}$ in $\underline{\sigma}_2$ entsteht, wobei $s'_{j'} : T'_{j'}$ und

$$\{\, \mathbb{I}^I(a) \mid a : T'_{j'} \,\} = \{\, \mathbb{I}^I(b) \mid b : T_{k'} \,\}$$

gelten, wenn $\dot{c}_{k'}$ an die Stelle $s'_{j'}$ eingesetzt wird.

Dies wird mit $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle$ ausgedrückt. $\Diamond$

Beispiel 2.31. Betrachten wir die Infondarstellungen

$$\langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle$$

und

$$\langle\!\langle \text{unter}, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle$$

zur Beispielwelt (Beispiel 2.20). Aus Beispiel 2.26 und Kapitel 2.2 geht hervor:

$$\mathbb{I}^I(w_1) = w_1, \mathbb{I}^I(w_2) = w_2, \mathbb{I}^R(\text{auf}) = \pi\big(\mathbb{I}^R(\text{unter})\big)$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle\big) &= \\ = \pi\Big(\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{unter}, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle\big)\Big)\end{aligned}$$

mit der Permutation π, für die $\pi(2) = 1$ und $\pi(1) = 2$ gelten. Also gilt

$$\begin{aligned}\langle \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}_1 \rangle &\approx \\ \approx \langle \langle\!\langle \text{unter}, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}_2 \rangle.\end{aligned}$$

Folgerung 2.32. *Punkt 3 aus Definition 2.30 impliziert, dass die Informationsgehalte auch dann nicht äquivalent sind, wenn zwei Datenmengen in dieselbe Zielmenge abgebildet werden, aber unterschiedliche Teile derselben darstellen.*

Folgerung 2.33. *Seien* Σ_1 *und* Σ_2 *zwei Signaturen und* $w = (W, F)$ *eine Welt. Seien weiterhin*

$$\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle = \langle (\!(R_1, s_1^1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n^1 \rightsquigarrow a_n, t_1, i_1)\!), (\mathbb{I}_1^I, \mathbb{I}_1^R, \mathbb{I}_1^T) \rangle$$

und

$$\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle = \langle (\!(R_2, s_1^2 \rightsquigarrow b_1, \ldots, s_n^2 \rightsquigarrow b_n, t_2, i_2)\!), (\mathbb{I}_2^I, \mathbb{I}_2^R, \mathbb{I}_2^T) \rangle$$

zwei äquivalente Informationsgehalte zu diesen Signaturen.

Sind $\underline{\sigma}_1$ *und* $\underline{\sigma}_2$ *zwei parametrische Infondarstellungen, so existiert für jede Infondarstellung* $\underline{\sigma}'_1$*, die durch eine Belegung der Parameter* $\dot{a}_k$ *aus* $\underline{\sigma}_1$ *mit Individuen* a_k *des entsprechenden Typs* T_k^1 *entstanden ist, eine entsprechende Belegung für die Parameter* $\dot{b}_j$ *mit Individuen des Typs* T_j^2 *für* $\underline{\sigma}_2$*. Wird die dadurch entstehende Darstellung mit* $\underline{\sigma}'_2$ *bezeichnet, so bedeutet hier „entsprechend“:*

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}'_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}'_2)\big), \tag{2.38}$$

wobei hier π *die Permutation aus Definition 2.30 (Seite 38) ist.*

Beweis. Sei $\dot{a}_k = \dot{b}_j$, wobei $\dot{a}_k$ und $\dot{b}_j$ durch die Interpretation derselben Stelle zugeordnet werden (vergleiche Definition 2.30, Punkt 3, Seite 39), dann gilt

$$\{\, \mathbb{I}_1^I(a) \mid a \in D_{T_k^1} \,\} = \{\, \mathbb{I}_2^I(b) \mid b \in D_{T_j^2} \,\}.$$

Sei $a_k \in D_{T_k^1}$. Dann existiert ein $b_j \in D_{T_j^1}$ mit $\mathbb{I}_1^I(a_k) = \mathbb{I}_2^I(b_j)$. Also folgt für zwei Darstellungen $\underline{\sigma}'_1$ und $\underline{\sigma}'_2$, die durch Substitution von $\dot{a}_k$ durch a_k und $\dot{b}_j$ durch b_j entstehen:

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}'_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^I(\underline{\sigma}'_2)\big).$$

Dies lässt sich induktiv für jede weitere Stelle fortsetzen, welche von einem Parameter besetzt ist. □

Lemma 2.34. *Seien* Σ_1 *und* Σ_2 *zwei Signaturen und* $w = (W, F)$ *eine Welt. Weiterhin seien* $\mathbb{I}_1$ *und* $\mathbb{I}_2$ *geeignete Interpretationen und* $\underline{\sigma}_1$ *und* $\underline{\sigma}_2$ *zwei parameterfreie Infondarstellungen zu* Σ_1 *und* Σ_2*.*

Aus $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle$ *folgt für alle Situationen* $s \in \mathfrak{S}$*:*

$$s \models \langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \textit{ genau dann, wenn } s \models \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle. \tag{2.39}$$

Beweis. Sei

$$\langle\langle\!\langle R_1, s_1^1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n^1 \rightsquigarrow a_n, t_1, i_1 \rangle\!\rangle, (\mathbb{I}_1^I, \mathbb{I}_1^R, \mathbb{I}_1^T)\rangle \approx$$
$$\approx \langle\langle\!\langle R_2, s_1^2 \rightsquigarrow b_1, \ldots, s_n^2 \rightsquigarrow b_n, t_2, i_2 \rangle\!\rangle, (\mathbb{I}_2^I, \mathbb{I}_2^R, \mathbb{I}_2^T)\rangle.$$

Dann existiert eine Permutation π entsprechend Definition 2.30 (Seite 38) so, dass gilt:

Für $i_1 = i_2$: Es sind $\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)$ und $\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big)$. Folglich gilt:

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) \in \mathbb{I}_1^R(R_1) \text{ genau dann, wenn } \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) \in \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big).$$

Mit

$$\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2) \in \mathbb{I}_2^R(R_2) \text{ genau dann, wenn } \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) \in \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)$$

folgt die Äquivalenz für die Bedingung (2.30) aus Punkt 1 von Definition 2.27 (Seite 37) für die Darstellungen $\underline{\sigma}_1$ und $\underline{\sigma}_2$.

Für $i_1 = 1 - i_2$: Es sind $\mathbb{I}_1^R(R_1) = \Big(\pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)\Big)^{\complement}$ und $\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big)$. Folglich gilt:

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) \in \mathbb{I}_1^R(R_1) \text{ genau dann, wenn } \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) \notin \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big).$$

Mit

$$\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2) \in \mathbb{I}_2^R(R_2) \text{ genau dann, wenn } \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) \in \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)$$

folgt die Äquivalenz für die Bedingung (2.30) aus Punkt 1 von Definition 2.27 (Seite 37) für beide Darstellungen $\underline{\sigma}_1$ und $\underline{\sigma}_2$.

Betrachten wir nun Punkt 2 und Gleichung (2.31) aus Definition 2.27 (Seite 37). In beiden eben diskutierten Fällen gilt

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big).$$

Gleichung (2.31) ist invariant gegenüber der Permutation π. Sie gilt also entweder für $\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1)$ und für $\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)$, oder für keines der beiden Tupel. Sei

$$M_1 = \{\, x_k^j \mid j \in \{\,1, \ldots, m\,\}, k \in \{\,0, \ldots, k_j\,\}\,\},$$

wobei die beteiligten Komponenten wie in (2.27) für $\underline{\sigma}_1$ definiert seien. Analog sei M_2 für $\underline{\sigma}_2$ definiert. Dann sind M_1 und M_2 identische Mengen. Damit sind die beiden Aussagen $M_1 \cap W \subseteq W_s$ und $M_2 \cap W \subseteq W_s$ gleichwertig.

Demzufolge sind alle Aussagen aus Definition 2.27 (Seite 37) für beide Infondarstellungen äquivalent. Dies belegt die Richtigkeit von Lemma 2.34 für saturierte Infondarstellungen.

Sind die Infondarstellungen unsaturiert, so gelten $i_1 = i_2$ und es gibt parametrische Infondarstellungen σ'_1 und σ'_2 entsprechend Definition 2.30, Punkt 4 (Seite 38), so dass gilt

$$\langle \underline{\sigma}'_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}'_2, \mathbb{I}_2 \rangle.$$

Aus Folgerung 2.33 folgt nun, dass es zu jeder Belegung der Parameter aus σ'_1 mit Werten der entsprechenden Typen auch eine Belegung der Parameter aus σ'_2 gibt, so dass die resultierenden Informationsgehalte äquivalent sind. Gleiches gilt folglich auch andersherum. Damit folgt aber die Aussage von Lemma 2.34 aus Definition 2.27 (Seite 37). □

Folgerung 2.35. *Seien Σ_1 und Σ_2 zwei Signaturen und $w = (W, F)$ eine Welt. Dann gilt für zwei Informationsgehalte $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle$ und $\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle$ zu diesen Signaturen:*

$$\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle \text{ genau dann, wenn } \langle \overline{\underline{\sigma}}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \overline{\underline{\sigma}}_2, \mathbb{I}_2 \rangle. \tag{2.40}$$

Beweis. Betrachten wir Definition 2.30 (Seite 38), so sind die Bedingungen 2 und 3 unabhängig von der Polarität. Sie werden also durch die Bildung der dualen Infondarstellung nicht beeinflusst. Es bleibt also die Äquivalenz für die Bedingungen 1 und 4 zu zeigen.

Wenden wir uns zunächst saturierten Infondarstellungen zu. Seien i_1 und i_2 die Polaritäten von $\underline{\sigma}_1$ und $\underline{\sigma}_2$. Sei weiterhin $i_1 = i_2$. Dann sind beide Informationsgehalte genau dann äquivalent, wenn eine Permutation π entsprechend Definition 2.30 (Seite 38) existiert, so dass $\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big)$ ist. Andererseits ist

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \mathbb{I}_1^T(\overline{\underline{\sigma}}_1) \text{ und } \mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2) = \mathbb{I}_2^T(\overline{\underline{\sigma}}_2). \tag{2.41}$$

Also folgt $\mathbb{I}_1^T(\overline{\underline{\sigma}}_1) = \mathbb{I}_2^T(\overline{\underline{\sigma}}_2)$. Daraus folgt mit $1 - i_1 = 1 - i_2$ die Aussage.

Sei nun $i_1 = 1 - i_2$. Dann sind beide Informationsgehalte genau dann äquivalent, wenn eine Permutation π existiert, so dass

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \Big(\pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big)\Big)^{\mathsf{C}}$$

ist. Hier gilt mit (2.41)

$$\mathbb{I}_1^T(\overline{\underline{\sigma}}_1) = \Big(\pi\big(\mathbb{I}_2^T(\overline{\underline{\sigma}}_2)\big)\Big)^{\mathsf{C}}.$$

Daraus folgt auch hier mit $1 - i_1 = i_2$ die Aussage.

Für unsaturierte Infondarstellungen gilt entsprechend Bedingung 4 von Definition 2.30: $i_1 = i_2$. Alle weiteren strukturellen Merkmale der Darstellungen bleiben unberührt. Daraus folgt mit dem bisher Bewiesenen die Aussage.

Streng genommen wurde bisher nur eine Richtung des Beweises gezeigt. Die andere folgt aber analog durch Anwendung von Folgerung 2.24 (Seite 33) auf den bisherigen Beweis. □

Satz 2.36. *Seien* $\{\,\Sigma_j \mid \Sigma_j = (\mathfrak{G}_j, \mathfrak{R}_j), j \in J\,\}$ *eine Menge von Signaturen,* $w = (W, F)$ *eine Welt und* $\{\,\mathbb{I}_j \mid j \in J\,\}$ *eine Menge von Interpretationen zu den Signaturen und der Welt.*

Dann handelt es sich bei der Relation $\approx$ *um eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Informationsgehalte, die mit Hilfe der Signaturen* Σ_j *und der Interpretationen* $\mathbb{I}_j$ *erzeugt werden können.*

Beweis. Wie bei jeder Äquivalenzrelation müssen auch hier Symmetrie, Transitivität und Reflexivität gezeigt werden. Betrachten wir zunächst die parameterfreien Darstellungen.

Reflexivität. Betrachten wir $\underline{\sigma}_1 = \underline{\sigma}_2$ und $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2$. Setzen wir für π die Identität Id ein, so erhalten wir in Definition 2.30 (Seite 38):

$$R_1 = R_2,\ a_j = b_j \text{ für } j \in \{\,1, \ldots, m\,\},\ \mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 \text{ und } i_1 = i_2.$$

Damit gelten die Punkte 1, 2 und 3. Auch für Punkt 4 lässt sich eine gleiche Belegung finden. Also gilt

$$\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle.$$

Symmetrie. Sei $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle$. Dann existiert bei Bezeichnung entsprechend Definition 2.30 (Seite 38) eine Permutation π, die eine der Gleichungen

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big) \text{ oder } \mathbb{I}_1^R(R_1) = \Big(\pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)\Big)^{\mathsf{C}}$$

erfüllt. Da Permutationen bijektive Abbildungen sind, existiert also eine Permutation π^{-1}, so dass im Fall $i_1 = i_2$ gilt:

$$\pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big) = \mathbb{I}_2^R(R_2) \text{ und } \pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1)\big) = \mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2).$$

Für $i_1 = 1 - i_2$ folgt entsprechend:

$$\pi^{-1}\Big(\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big)^{\mathsf{C}}\Big) = \mathbb{I}_2^R(R_2) \text{ und } \pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1)\big) = \mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2).$$

Sei nun

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) \subseteq M_1 \times \cdots \times M_m.$$

Diese Struktur existiert aufgrund von (2.24). Dann ist

$$\pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big) \subseteq M_{\pi^{-1}(1)} \times \cdots \times M_{\pi^{-1}(m)} = \pi^{-1}(M_1 \times \cdots \times M_m).$$

Demzufolge ist

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}\Big(\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big)^{\complement}\Big) &= \pi^{-1}\big(M_1 \times \cdots \times M_m \setminus \mathbb{I}_1^R(R_1)\big) \\
&= \big(M_{\pi^{-1}(1)} \times \cdots \times M_{\pi^{-1}(m)}\big) \setminus \pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big) \qquad (2.42)\\
&= \Big(\pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big)\Big)^{\complement}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\Big(\pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big)\Big)^{\complement} = \mathbb{I}_2^R(R_2)$$

für $i_1 = 1 - i_2$.

Damit wurden für die Punkte 1 und 2 aus Definition 2.30 (Seite 38) die Symmetrie gezeigt. Punkt 3 ist aber schon symmetrisch aufgebaut, so dass auch für ihn die Symmetrie gilt. Für Punkt 4 folgt die Symmetrie aus der der anderen Punkte, denn es kann dieselbe Belegung der unbestimmten Stellen mit Parametern verwendet werden.

Also folgt aus $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1\rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2\rangle$ auch $\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2\rangle \approx \langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1\rangle$.

Transitivität. Seien $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1\rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2\rangle$ und $\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2\rangle \approx \langle \underline{\sigma}_3, \mathbb{I}_3\rangle$. Dann existieren Permutationen π_1 und π_2, so dass für die acht möglichen Fälle gilt:

$i_1 = i_2 = i_3$:

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi_1\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big) = \pi_1\Big(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)\Big).$$

Dies erhält man durch Substitution von $\mathbb{I}_2^R(R_2)$ durch den gleichwertigen Term $\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)$. Die Verkettung zweier Πermutationen ergibt wieder eine Permutation. Also erhält man mit $\pi_3 = \pi_1 \circ \pi_2$:

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi_3\big(\mathbb{I}_3^R(_3)\big) \text{ und analog dazu } \mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi_3\big(\mathbb{I}_3^T(\underline{\sigma}_3)\big)$$

aus

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi_1\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) = \pi_1\Big(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^T(\underline{\sigma}_3)\big)\Big).$$

$i_1 = i_2 = 1 - i_3$: Dann ist $i_1 = 1 - i_3$. Weiterhin gilt

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi_1\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big) = \pi_1\left(\left(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)\right)^{\complement}\right).$$

Aus (2.42) folgt damit

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \left(\pi_1\left(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)\right)\right)^{\complement} = \left(\pi_3\big(\mathbb{I}^R(R_3)\big)\right)^{\complement}$$

für $\pi_3 = \pi_1 \circ \pi_2$.

$i_1 = 1 - i_2 = i_3$: Hier ist $i_1 = i_3$. Durch einfaches Einsetzen unter anderem von (2.42) erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_1^R(R_1) &= \left(\pi_1\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)\right)^{\complement} \\
&= \left(\pi_1\left(\left(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)\right)^{\complement}\right)\right)^{\complement} \\
&= \left(\left(\pi_1\left(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)\right)\right)^{\complement}\right)^{\complement} \\
&= \pi_3\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big).
\end{aligned}$$

$1 - i_1 = i_2 = i_3$: Dieser Fall kann einfach durch Umnummerierung auf denjenigen mit $i_1 = i_2 = 1 - i_3$ zurückgeführt werden. Dies ist möglich, da die Symmetrie für $\mathbb{I}^R(R)$ schon gezeigt wurde.

$1 - i_1 = 1 - i_2 = i_3$: Dieser Fall entspricht $i_1 = i_2 = 1 - i_3$.

$1 - i_1 = i_2 = 1 - i_3$: Dieser Fall entspricht $i_1 = 1 - i_2 = i_3$.

$i_1 = 1 - i_2 = 1 - i_3$: Dieser Fall entspricht $1 - i_1 = i_2 = i_3$.

$1 - i_1 = 1 - i_2 = 1 - i_3$: Dieser Fall entspricht $i_1 = i_2 = i_3$.

Für die Tupelinterpretation gilt:

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi_1\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) = \pi_1\left(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^T(\underline{\sigma}_3)\big)\right) = \pi_3\big(\mathbb{I}_3^T(\underline{\sigma}_3)\big).$$

Damit konnte die Transitivität für parameterfreie, saturierte Darstellungen gezeigt werden.

Seien nun $\dot{a}_k$, $\dot{b}_j$ und $\dot{c}_l$ drei Parameter der Infondarstellungen $\underline{\sigma}_1$, $\underline{\sigma}_2$ und $\underline{\sigma}_3$, die durch die Interpretation derselben Stelle zugeordnet werden. Diese seien

Parameter zu den Typen $\dot{a}_k \in D_{T_k^1}$, $\dot{b}_j \in D_{:T_j^2}$ und $\dot{c}_l \in D_{T_l^3}$. Dann gilt für die Interpretation dieser Typen:

$$\{\, \mathbb{I}_1^I(a) \mid a \in D_{T_k^1} \,\} = \{\, \mathbb{I}_2^I(b) \mid b \in D_{T_j^2} \,\} = \{\, \mathbb{I}_3^I(c) \mid c \in D_{T_l^3} \,\}.$$

Desweiteren gilt: $\dot{a}_k = \dot{b}_j = \dot{c}_l$.

Aus der Transitivität der Gleichheit folgt nun:

$$\{\, \mathbb{I}_1^I(a) \mid a \in D_{T_k^1} \,\} = \{\, \mathbb{I}_3^I(c) \mid c \in D_{T_l^1} \,\} \text{ und } \dot{a}_k = \dot{c}_l.$$

Also gilt die Transitivität auch für parametrische, saturierte Infondarstellungen.

Kommen wir nun zu unsaturierten Infondarstellungen. Es gilt

$$i_1 = i_2 = i_3.$$

Weiterhin existieren zu den unbestimmten Stellen s_j^1 von $\underline{\sigma}_1$ Parameter $\dot{c}_j$ des entsprechenden Typs und zu den unbestimmten Stellen s_l^3 von $\underline{\sigma}_3$ Parameter $\dot{d}_l$ des entsprechenden Typs, so dass sich durch eine Einsetzung der Parameter für die unbestimmten Stellen der einzelnen Infondarstellungen die Darstellungen $\underline{\sigma}'_1$, $\underline{\sigma}'_2$, $\underline{\sigma}''_2$ und $\underline{\sigma}'_3$ ergeben. Dabei wurden $\underline{\sigma}'_1$ und $\underline{\sigma}'_2$ mit Hilfe der $\dot{c}_j$ gebildet und $\underline{\sigma}''_2$ und $\underline{\sigma}'_3$ durch $\dot{d}_l$, so dass

$$\langle \underline{\sigma}'_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}'_2, \mathbb{I}_2 \rangle \text{ und } \langle \underline{\sigma}''_2, \mathbb{I}_2 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}'_3, \mathbb{I}_3 \rangle$$

gelten. Die $\dot{d}_l$ seien paarweise verschieden, wie in Definition 2.30 gefordert (woraus auch folgt, dass dies möglich ist). Werden $\dot{c}_j$ und $\dot{d}_l$ derselben Stelle $s_k^{2\prime}$ in $\underline{\sigma}''_2$ und $\underline{\sigma}'_2$ zugeordnet, so besitzt diese denselben Typ, wie $s_j^{1\prime}$ und $s_l^{3\prime}$. Dies folgt aus derselben Definition. Demzufolge erfüllt auch die Infondarstellung $\underline{\sigma}''_3$, die entsteht, wenn man in $\underline{\sigma}'_3$ die Parameter $\dot{d}_l$ durch die zugehörigen (wie eben beschrieben) Parameter $\dot{c}_j$ ersetzt, die Bedingungen der genannten Definition und es gilt:

$$\langle \underline{\sigma}'_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}'_2, \mathbb{I}_2 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}''_3, \mathbb{I}_3 \rangle,$$

da $\underline{\sigma}'_2$ aus $\underline{\sigma}''_2$ durch dieselbe Ersetzung hervorgeht. Aufgrund der eben gezeigten Transitivität der Äquivalenz für parametrische Infondarstellungen folgt:

$$\langle \underline{\sigma}'_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}''_3, \mathbb{I}_3 \rangle.$$

Damit konnte die Transitivität auch entsprechend Bedingung 4 von Definition 2.30 nachgewiesen werden.

Nachdem nun Reflexivität, Symmetrie und Transitivität bewiesen wurden, wurde damit auch gezeigt, dass es sich bei der Äquivalenz $\approx$ von Informationsgehalten auch wirklich um eine Äquivalenzrelation handelt. $\square$

Definition 2.37. Seien $\{\, \Sigma_j \mid \Sigma_j = (\mathfrak{G}_j, \mathfrak{R}_j), j \in J \,\}$ eine Menge von Signaturen, $w = (W, F)$ eine Welt und $\{\, \mathbb{I}_j \mid j \in J \,\}$ eine Menge von Interpretationen zu den Signaturen.

Die Restklasse des Informationsgehaltes

$$\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle = \langle (\!(R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_1 \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i)\!), \mathbb{I} \rangle$$

bezüglich der Äquivalenz wird *elementares Infon* genannt. Dafür wird die Notation

$$\sigma = [\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle]_{\approx} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}} \tag{2.43}$$

verwendet. Analog der dualen Infondarstellung wird $\overline{\sigma} = [\langle \overline{\underline{\sigma}}, \mathbb{I} \rangle]_{\approx}$ *duales Infon* zu σ genannt.

Eine Situation s *akzeptiert* ein Infon σ, falls es einen Informationsgehalt $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$ mit $s \vDash \langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$ in σ gibt. Dies wird entsprechend mit der *infonischen Aussage* $s \vDash \sigma$ bezeichnet.

Ein Infon σ heißt ein *Faktum*, falls eine reale Situation s mit $s \vDash \sigma$ existiert.

Die Menge aller Infone wird mit $\mathfrak{I}$ bezeichnet. $\Diamond$

Folgerung 2.38. *Für zwei Informationsgehalte* $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle$ *und* $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_2 \rangle$ *mit*

$$[\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle]_{\approx} = [\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle]_{\approx}$$

gelten die folgenden beiden Bedingungen:

$$\mathrm{Act}(\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle) = \mathrm{Act}(\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle) \;\; \textit{und} \;\; \mathrm{Obj}(\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle) = \mathrm{Obj}(\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle).$$

Beweis. Beide Informationsgehalte sind äquivalent. Damit folgt die Behauptung sofort aus Punkt 2 von Definition 2.30 (Seite 38) und Definition 2.27 (Seite 37). $\square$

Bemerkung 2.39. Ein Infon wird also im Wesentlichen durch ein Tupel einer Relation in der Welt charakterisiert. Demnach können und werden wir Folgerung 2.38 entsprechend die Operatoren $\mathrm{Act}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle)$ und $\mathrm{Obj}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle)$ an σ vererben.

Bemerkung 2.40. Im Folgenden gehen wir gelegentlich von einer festen Signatur und einer festen Interpretation aus. Da diese dann in jenem Zusammenhang eindeutig sind, werden wir dann Gleichung (2.43) in der Form

$$\sigma = \langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, t, i \rangle\!\rangle \tag{2.45}$$

schreiben.

Bemerkung 2.41. Reale Situationen können je nach Welt durchaus hoch komplex sein. Damit können sie unter Umständen eine überabzählbare Anzahl von Infonen akzeptieren. Meist wird ein Theoretiker oder Akteur nur über einen kleinen Teil der Informationen über eine Situation verfügen können. Dies ist häufig auf eine beschränkte Signatur zurückzuführen. Beispielsweise spricht man gelegentlich davon, ein Mensch könne effektiv nur endlich viele Informationen verarbeiten. Jegliche Beschäftigung mit unendlich großen Klassen werde über eine Klassifikation auf endliche Mengen/Klassen zurückgeführt. Insofern wird die Informationsverarbeitung weniger mit Situationen, als mit Typen von Situationen arbeiten müssen, wie sie in Abschnitt 2.4.1 ab Seite 54 behandelt werden.

Beispiel 2.42. Aus den Informationsgehalten aus Beispiel 2.29 (Seite 38) lassen sich Infone bilden. Die zugehörigen infonischen Aussagen wurden in Tabelle 2.7 (Seite 49) zusammengestellt. Da wir uns dabei auf eine einzige Interpretation $\mathbb{I}$ (aus Beispiel 2.26, Seite 35) beziehen, brauchen wir diese hier nicht extra zu notieren.

$$
\begin{aligned}
&s_1 \models \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_1, 1\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_2, 1\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_3, 1\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, p, 1\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, w_1, 0\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 0\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_2, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_3, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{neben}, \mathit{Objekt}_1 \rightsquigarrow w_2, \mathit{Objekt}_2 \rightsquigarrow w_3, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{zwischen}, \mathit{außen}_1 \rightsquigarrow w_1, \mathit{Mitte} \rightsquigarrow w_2, \mathit{außen}_2 \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{oberhalb}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle,
\end{aligned}
$$

Tabelle 2.7: Infone, die von s_1 akzeptiert werden

2.3.3 Reale und abstrakte Situationen

Definition 2.43. Eine Menge $I \subseteq \mathfrak{I}$ von Infonen heißt *abstrakte Situation*.
Ist s eine reale Situation, so heißt die abstrakte Situation

$$I = \{\, \sigma \mid s \vDash \sigma \,\} = \vDash(s) \tag{2.46}$$

abstrakte Situation zur realen Situation s. ◊

Satz 2.44. *Seien $\{\, \Sigma_j \mid \Sigma_j = (\mathfrak{G}_j, \mathfrak{R}_j), j \in J \,\}$ eine Menge von Signaturen, $w = (W, F)$ eine Welt und $\{\, \mathbb{I}_j \mid j \in J \,\}$ eine Menge von Interpretationen zu den Signaturen. Dann folgt für die akzeptierten Infone der beiden Situationen s_1 und s_2 aus $s_1 \subseteq s_2$*

$$\vDash(s_1) \subseteq \vDash(s_2). \tag{2.47}$$

Existiert zu jedem Tupel

$$\mathfrak{t} = \Big(\big(x_0^1, w_{x_0^1}^{e_1^1}(t), \ldots, w_{x_0^1}^{e_{k_1}^1}(t)\big), \ldots, \big(x_0^m, w_{x_0^m}^{e_1^m}(t), \ldots, w_{x_0^m}^{e_{k_m}^m}(t)\big), t \Big)$$

der Welt ein Infon $\sigma = [\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle]_{\approx}$ mit $\mathfrak{t} = \mathbb{I}^T(\underline{\sigma})$, so ist (2.47) *nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für $s_1 \subseteq s_2$.*

Beweis. Seien $s_1 = (W_{s_1}, F_{s_1})$ und $s_2 = (W_{s_2}, F_{s_2})$.

Aus $s_1 \subseteq s_2$ folgt $\vDash(s_1) \subseteq \vDash(s_2)$: Für jede Interpretation $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$ und für jedes Infon $\sigma = \langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, i \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$ folgt aus $s_1 \vDash \sigma$ und Definition 2.27 von Seite 37

$$\{\, \mathbb{I}^I(a_1), \ldots, \mathbb{I}^I(a_n) \,\} \cap W \subseteq W_{s_1}.$$

Die Interpretation $\mathbb{I}^R(R)$ hängt nur von der Welt, aber nicht von der Situation ab, ist also für s_1 und s_2 gleich. Aus Definition 2.8 (Seite 22) folgt nun

$$\{\, \mathbb{I}^I(a_1), \ldots, \mathbb{I}^I(a_n) \,\} \cap W \subseteq W_{s_2}.$$

Weiterhin folgt für jedes $t \in T$ und jedes

$$x \in \{\, \mathbb{I}^I(a_1), \ldots, \mathbb{I}^I(a_n) \,\} \cap W$$

aus der Existenz des Funktionswertes der eingeschränkten Weltlinie $w_{s_1}^x(t)$ von x in s_1 die Gleichheit mit der eingeschränkten Weltlinie $w_x^{s_2}(t)$ von x in

s_2. Daraus ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^T(\sigma) = \mathbb{I}^T(\underline{\sigma}) &= \Big(\big(x_0^1, w_{x_0^1}^{e_1^1}(t)|_{T^1_{x_0^1}}, \ldots, w_{x_0^1}^{e_{k_1}^1}(t)|_{T^1_{x_0^1}} \big), \ldots \\ &\qquad \ldots, \big(x_0^m, w_{x_0^m}^{e_1^m}(t)|_{T^1_{x_0^m}}, \ldots, w_{x_0^m}^{e_{k_m}^m}(t)|_{T^1_{x_0^m}} \big), t \Big) \\ &= \Big(\big(x_0^1, w_{x_0^1}^{e_1^1}(t)|_{T^2_{x_0^1}}, \ldots, w_{x_0^1}^{e_{k_1}^1}(t)|_{T^2_{x_0^1}} \big), \ldots \\ &\qquad \ldots, \big(x_0^m, w_{x_0^m}^{e_1^m}(t)|_{T^2_{x_0^m}}, \ldots, w_{x_0^m}^{e_{k_m}^m}(t)|_{T^2_{x_0^m}} \big), t \Big), \end{aligned} \tag{2.48}$$

da für alle $x \in W_{s_1}$ gilt $T_x^1 \subseteq T_x^2$. Hieraus folgt aber nun wieder $s_2 \models \sigma$.

Aus $\models(s_1) \subseteq \models(s_2)$ **folgt** $s_1 \subseteq s_2$**:** Dieser Beweis erfolgt indirekt. Angenommen es gelte $s_1 \not\subseteq s_2$.

In diesem Fall existiert ein $x \in W_{s_1}$ und ein $t_1 \in T$, so dass zwar die eingeschränkte Weltlinie $w_x^{s_1}(t)|_{T_x} \in F_{s_1}$ zur Zeit t_1 definiert ist, nicht aber $w_x^{s_2}(t)|_{T_x} \in F_{s_2}$. Dann existieren eine Signatur Σ und eine Interpretation $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$, so dass $s_1 \models \sigma$ für ein Infon $\sigma = \langle\!\langle R, a_1, a_2, t_1, 1 \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$ mit

$$\Big(\big(x, w_x^e(t_1) \big), t_1 \Big) \in \mathbb{I}^R(R)$$

für eine beliebige Eigenschaftsfunktion $w_x^e(t)$ aus der eingeschränkten Weltlinie $w_x^{s_1}(t)$, die für t_0 definiert ist, $\mathbb{I}^I(a_1) = x$, $\mathbb{I}^I(a_2) = w_x^e(t)$ und

$$\mathbb{I}^T \langle\!\langle R, a_1, a_2, t, 1 \rangle\!\rangle = \Big(\big(\mathbb{I}^I(a_1), \mathbb{I}^I(a_2) \big), \mathbb{I}^I(t) \Big).$$

Damit gilt nun $s_2 \not\models \sigma$ beziehungsweise $\models(s_1) \not\subseteq \models(s_2)$.

Also folgt $s_1 \subseteq s_2$ aus $\models(s_1) \subseteq \models(s_2)$. □

Bemerkung 2.45. Satz 2.44 besitzt eine starke Voraussetzung. Dennoch ist diese nicht unbedingt unerfüllbar. Nimmt man beispielsweise eine Signatur, in deren Individuenmenge exakt die Objekte und Eigenschaftswerte der Welt enthalten sind und deren Relationenmenge genau der Menge der Relationen in der Welt, deren Tupel (2.31) entsprechen, so erfüllt diese Signatur in Verbindung mit der identischen Interpretation die Voraussetzung dieses Satzes.

Damit existiert theoretisch die Möglichkeit zwei unterschiedliche Situationen anhand der durch sie akzeptierten Infone zu unterscheiden.

Bemerkung 2.46. Da Situationen genauso wie die Welt über Objekte definiert wurden und der Teilsituations-Beziehung auch eine Objekt-Zeit-Teilmengen-Beziehung zu Grunde liegt, folgt auch die Teilbeziehung der den Objekten zugeordneten räumlichen Beziehungen. Insbesondere gilt das, wenn man – wie dies auch häufig im alltäglichen Leben geschieht – räumliche Gebiete benutzt, um Situationen festzulegen.

Bemerkung 2.47. Für ein beliebiges Infon gilt:

$$\text{Aus } s_1 \vDash \sigma \text{ und } s_1 \subseteq s_2 \text{ folgt: } s_2 \vDash \sigma. \tag{2.49}$$

Diese Eigenschaft heißt *Persistenz*. In dem hier gegebenen Rahmen spielt sie eine eher untergeordnete Rolle, da sie mit Satz 2.44 (Seite 50) folgt.

Beispiel 2.48. In Abschnitt 2.2 (ab Seite 25) hatten wir zwei Situationen s_1 und s_2 definiert. Wenn wir jetzt die relativen Ortsangaben „auf“, „unter“, „neben“ und so weiter in Infonen mit Relationen ohne Zeitangaben zulassen würden, so erhielten wir die folgenden Aussagen:

$$\begin{aligned}
&s_1 \vDash \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \vDash \langle\!\langle \text{auf}, w_1, w_3, 0 \rangle\!\rangle,\\
&s_2 \vDash \langle\!\langle \text{auf}, w_1, w_2, 0 \rangle\!\rangle \text{ und}\\
&s_2 \vDash \langle\!\langle \text{auf}, w_1, w_3, 1 \rangle\!\rangle.
\end{aligned}$$

Nun gehören beide Situationen s_1 und s_2 zu unserer Welt w. Also müssen $s_1 \in \mathfrak{S}$ und $s_2 \in \mathfrak{S}$ gelten. Damit werden alle vier Infone von der Welt akzeptiert, was letztere wiederum widersprüchlich macht. Da unsere Welt per definitionem widerspruchsfrei ist, können unsere Infone also nicht persistent sein. Dies widerspricht aber der Intention, die Welt mit Hilfe der Situationen zu strukturieren, da diese Struktur für unsere Infone nicht fassbar wird.

Um die Persistenz wieder herzustellen ist es notwendig, die Infone der beiden Situationen gegeneinander abzugrenzen. Das geschieht hier mit Hilfe von zeitlichen Lokalisierungen t_0 und t_1. Eine räumliche Lokalisierung ist in hier nicht notwendig, da in diesem Falle die exakt bezeichneten Objekte im Raum eindeutig lokalisiert sind. Damit ist eine räumliche Lokalisierung implizit gegeben. Statt der obigen widersprüchlichen Information muss es also heißen:

$$\begin{aligned}
&s_1 \vDash \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \vDash \langle\!\langle \text{auf}, w_1, w_3, t_0, 0 \rangle\!\rangle,\\
&s_2 \vDash \langle\!\langle \text{auf}, w_1, w_2, t_1, 0 \rangle\!\rangle \text{ und}\\
&s_2 \vDash \langle\!\langle \text{auf}, w_1, w_3, t_1, 1 \rangle\!\rangle.
\end{aligned}$$

Wir können nun, da wir die Zeit als Komponente der Relationen festgelegt haben diese in einzelnen Infonen entsprechend Bemerkung 2.21 (Seite 32) wieder „weglassen“, wenn wir mit unbestimmten Zeitangaben arbeiten wollen. Dies erlaubt uns unter anderem die Definition 2.27 auf Seite 37.

Definition 2.49. Eine abstrakte Situation I heißt *kohärent*, wenn gilt:

1. Für jedes Infon $\sigma \in I$ gilt: $\overline{\sigma} \notin I$.

2. Aus $\langle\!\langle „=“, a, b, 1 \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}} \in I$ mit der Interpretation der Relation „=“ als Identität Id folgt für die Interpretationen der Individuen $\mathbb{I}^I(a) = \mathbb{I}^I(b)$.

3. Es existiert kein a, so dass bei der Interpretation einer beliebigen Relation „=“ als Identität Id gilt $\langle\!\langle „=“, a, a, 0 \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}} \in I$. ♢

Die wesentliche Rolle der abstrakten Situationen besteht darin, auch mit nicht realen – das heißt nicht aktuellen und falschen – Informationen umgehen zu können.

Definition 2.50. Zwei abstrakte Situationen I und I' heißen *kompatibel*, wenn ihre Vereinigung $I \cup I'$ kohärent ist. ♢

Lemma 2.51. *Es sei $\mathfrak{I}_{\text{co}}$ die Teilmenge aller kohärenten abstrakten Situationen aus $\mathfrak{I}$. Dann ist $(\mathfrak{I}_{\text{co}}, \subseteq)$ eine Informationsstruktur.*

Beweis. Die leere abstrakte Situation $I = \emptyset$ ist per definitionem kohärent und jede Teilmenge I' einer kohärenten abstrakten Situation ist ebenfalls kohärent. Hieraus folgt die behauptete Eigenschaft bezüglich Durchschnitt und Vereinigung. □

Bemerkung 2.52. Die in der alternativen Definition (vergl. z. B. Hebisch 1991) geforderte Konsistenzrelation entspricht der Kompatibilität. Es gilt:

$$I \sim I' \text{ genau dann, wenn } I \text{ kompatibel zu } I'. \tag{2.50}$$

Definition 2.53. Eine abstrakte Situation I heißt *aktuell*, wenn gilt:

$$I \subseteq \models(w), \tag{2.51}$$

das heißt, wenn I eine Menge von Fakten ist. ♢

Folgerung 2.54. *Eine abstrakte Situation I ist genau dann aktuell, wenn es zu jedem Infon $\sigma \in I$ eine reale Situation s gibt, so dass*

$$s \models \sigma. \tag{2.52}$$

Folglich ist auch jede zu einer realen Situation gehörige abstrakte Situation aktuell.

Beweis. Entsprechend Satz 2.44 (Seite 50) gilt für jede Situation $s \in \mathfrak{S}$:

$$\vDash(s) \subseteq \vDash(w),$$

wenn man die Welt entsprechend Folgerung 2.5 und Bemerkung 2.6 (Seite 21) als Situation betrachtet. Demzufolge gilt mit $s \vDash \sigma$ auch $w \vDash \sigma$. Die andere Richtung wurde aber schon dadurch gezeigt, dass sich die Welt hier als Situation betrachten lässt. □

Folgerung 2.55. *Jede aktuelle abstrakte Situation ist kohärent.*

Beweis. Es sind die Bedingungen aus Definition 2.49 (Seite 53) nachzuweisen. Sei I eine aktuelle abstrakte Situation.

1. Aus $\sigma \in I$ folgt $w \vDash \sigma$. Wäre $\overline{\sigma} \in I$, so gälte auch $w \vDash \overline{\sigma}$, was aber entsprechend Definition 2.27 (Seite 37), Punkt 1 nicht möglich ist. Also ist Punkt 1 aus Definition 2.49 erfüllt.

2. Aus $\langle\!\langle „=“, a, b, 1\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}} \in I$ folgt $w \vDash \langle\!\langle „=“, a, b, 1\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$ aufgrund der Aktualität von I. Da $\mathbb{I}^R(„=“) = Id$ gilt, folgt in der Welt $\mathbb{I}^I(a) = \mathbb{I}^I(b)$. Somit ist auch Punkt 2 für „=“ gezeigt.

3. Für jede Relation „=“, die als Identität interpretiert wird, und jedes Individuum a gilt: $\mathbb{I}^I(a) = \mathbb{I}^I(a)$. Also gilt $w \vDash \langle\!\langle „=“, a, a, 1\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$ und damit aber auch $w \nvDash \langle\!\langle „=“, a, a, 0\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$. Folglich kann auch $\langle\!\langle „=“, a, a, 0\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$ nicht in I liegen. Dies ist genau die Forderung von Punkt 3 aus Definition 2.49.

Die letzten beiden Punkte gelten für jede Relation, die als Identität interpretiert wird. Daraus folgt die Aussage. □

2.4 Zusammengesetzte Infone

2.4.1 Typen und Parameter

Definition 2.56. Seien Σ eine Signatur, w eine Welt und $\mathbb{I}$ eine passende Interpretation.

Ein Parameter $\dot{p}$ *kommt* in einem elementaren Infon

$$\sigma = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, i\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$$

zu Σ und $\mathbb{I}$ und damit auch in der Relation R *frei vor*, wenn mindestens ein k mit $1 \leq k \leq n$ existiert, so dass $\dot{p} = a_k$ ist.[2]

[2]Betrachtet man höhere Logiken, so reicht es hier aus, wenn $\dot{p}$ in a_k vorkommt.

Ein Parameter $\dot{p}$ *kommt* in einer abstrakten Situation I *frei vor*, wenn es mindestens ein Infon $\sigma \in I$ gibt, so dass $\dot{p}$ in σ frei vorkommt.

Die Menge aller Infone, in denen ein Parameter $\dot{p}$ vorkommt, wird mit $I(\dot{p})$ bezeichnet.

Ein Infon, in dem mindestens ein freier Parameter vorkommt, heißt *parametrisches Infon*. Anderenfalls heißt es *parameterfreies Infon* ♢

Folgerung 2.57. *Ein elementares, parametrisches Infon entsteht durch Zuordnung einer Interpretation zu einer parametrischen Infondarstellung. Analog entsteht aus einer parameterfreien Infondarstellung auch immer ein parameterfreies Infon.*

Beweis. Dies folgt aus den Definitionen 2.56 (Seite 54), 2.30 (Seite 38) und 2.37 (Seite 48). □

Definition 2.58. Eine Funktion f, die einem Parameter $\dot{p}$ vom Typ T eines Infons σ ein Objekt einer Menge $A \subseteq \{ \mathbb{I}^I(a) \mid a \in D_T \}$ zuordnet, heißt *Anker* zur Menge A. Findet diese Zuordnung für alle in σ bzw. einer Menge I von Infonen frei vorkommenden Parameter statt, so wird dies mit $\sigma[f]$ bzw. $I[f]$ bezeichnet. ♢

Definition 2.59. Sei $I \subseteq \mathfrak{I}$ eine Menge von Infonen und s eine Situation. Dann wird der *Objekttyp*

$$T = [\, \dot{x} \mid s \vDash I \,] \tag{2.53}$$

definiert durch:

x ist vom Typ T genau dann, wenn ein Anker f an s existiert, so dass

$$s \vDash I[f] \text{ und } f(\dot{x}) = \mathbb{I}^I(x). \tag{2.54}$$

Die Situation s wird auch *Grundsituation* zum Typ T genannt.
Für $I = \{ \sigma \}$ kann auch

$$T = [\, \dot{x} \mid s \vDash \sigma \,] \tag{2.55}$$

geschrieben werden.

Enthält das Infon σ bzw. die Menge I nicht den Parameter $\dot{x}$, so handelt es sich um eine ausgeartete *Definition*.

Zwei Objekttypen $[\, \dot{p} \mid s_1 \vDash I_1 \,]$ und $[\, \dot{q} \mid s_2 \vDash I_2 \,]$ heißen genau dann *definitionsgleich*, wenn I_2 aus I_1 hervorgeht, wenn man in I_1 jeden freien Parameter $\dot{p}$ durch $\dot{q}$ ersetzt, und weiterhin $s_1 = s_2$ gilt. Dies wird mit

$$[\, \dot{p} \mid s_1 \vDash I_1 \,] =_d [\, \dot{q} \mid s_2 \vDash I_2 \,] \tag{2.56}$$

dargestellt. ♢

Bemerkung 2.60. Freie Parameter von Infonen, die nicht in Argumentstellen eingehen, werden hier also implizit Existenz-quantifiziert.

Definition 2.61. Sei s eine Situation zur Welt w und $I \subseteq \mathfrak{I}$ eine Menge von Infonen. Ein Parameter $\dot{p}$ *kommt* in einem Objekttyp $[\,\dot{q} \mid s \vDash I\,]$ gemäß Definition 2.59 (Seite 55) *vor*, wenn $\dot{p}$ in $\dot{q}$ oder $\dot{p}$ in I vorkommt. ♢

Definition 2.62. Sei $I \subseteq \mathfrak{I}$ eine Menge von Infonen. Dann wird durch

$$T = [\,\dot{s} \mid \dot{s} \vDash I\,] \tag{2.57}$$

der *Situationstyp* definiert, für den gilt:

$$s \text{ ist vom Typ } T \text{ genau dann, wenn ein Anker } f \text{ so existiert, dass } s \vDash I[f]. \tag{2.58}$$

Besteht die Menge I nur aus dem einen Infon σ, so kann man auch

$$T = [\,\dot{s} \mid \dot{s} \vDash \sigma\,] \tag{2.59}$$

schreiben.

Zwei Situationstypen $[\,\dot{s}_1 \mid \dot{s}_1 \vDash I_1\,]$ und $[\,\dot{s}_2 \mid \dot{s}_2 \vDash I_2\,]$ heißen *definitionsgleich*, wenn $I_1 = I_2$ ist. Auch dies besitzt die Darstellung

$$[\,\dot{s}_1 \mid \dot{s}_1 \vDash I_1\,] =_d [\,\dot{s}_2 \mid \dot{s}_2 \vDash I_2\,]. \tag{2.60}$$

♢

Beispiel 2.63. Im Beispiel aus Abschnitt 2.2 lassen sich alle Infone hinschreiben, die von einer Situation akzeptiert werden. Dies ist jedoch nicht immer so und meist auch nicht notwendig. Häufig ist es auch nicht notwendig, sich auf eine ganz bestimmte Situation zu beziehen. Dann reicht ein Situationstyp aus. Wollen wir uns mit Situationen beschäftigen, in denen ein Turm existiert, so ist es prinzipiell nicht notwendig, zu wissen, welcher der Würfel sich oben, in der Mitte oder unten befindet. Wichtig ist nur, dass sich zu einem gewissen Zeitpunkt jeweils *ein* Würfel oben, in der Mitte und unten befindet. Dies drücken wir mit Hilfe von Parametern für die Zeit und die Würfel aus. Es reicht also, den Situationstyp aus (2.61) zu betrachten.

$$\begin{aligned} S_1 = [\,\dot{s}_1 \mid \dot{s}_1 \vDash \{\, & \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, \dot{w}_1, 1\rangle\!\rangle, \\ & \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, \dot{w}_2, 1\rangle\!\rangle, \\ & \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, \dot{w}_3, 1\rangle\!\rangle, \\ & \langle\!\langle \text{auf}, \textit{oben} \rightsquigarrow \dot{w}_1, \textit{unten} \rightsquigarrow \dot{w}_2, \textit{Zeit} \rightsquigarrow \dot{t}_1, 1\rangle\!\rangle, \\ & \langle\!\langle \text{auf}, \textit{oben} \rightsquigarrow \dot{w}_2, \textit{unten} \rightsquigarrow \dot{w}_3, \textit{Zeit} \rightsquigarrow \dot{t}_1, 1\rangle\!\rangle \,\}\,] \end{aligned} \tag{2.61}$$

Bemerkung 2.64. Für eine Situation s ist eine infonische Aussage immer gleichwertig zu einer parametrischen Aussage. Beispielsweise entspricht die infonische Aussage $s \models I$ der Parametrischen Aussage $s : T$, wenn $T = [\, \dot{s} \mid \dot{s} \models I \,]$ ist.

Beispiel 2.65. Kommen wir zurück zum Beispiel aus Abschnitt 2.2 von Seite 25. Dort erhalten wir für unsere Individuen die Aussagen $p : P$, $w_1 : W$, $w_2 : W$ und $w_3 : W$. Zu jedem Typ T existiert eine einstellige Test-Relation $\text{ist\_vom\_Typ\_}T : REL^1$.

Definition 2.66. Sei Σ eine Signatur und $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$ eine passende Interpretation. Für einen Typ T von Σ wird die *Interpretation eines Typs* entsprechend der Formel

$$\mathbb{I}^I(T) := \{\, \mathbb{I}^I(x) \mid x : T \,\} \tag{2.62}$$

definiert.

Ein Typ T_1 heißt *Interpretationsuntertyp* eines anderen Typs T_2, wenn für T_1 und T_2 die Bedingung $\mathbb{I}^I(T_1) \subseteq \mathbb{I}^I(T_2)$ gilt. Dies wird mit $T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$ beziehungsweise $T_2 \sqsupseteq_{\mathbb{I}} T_1$ bezeichnet.

Zwei Typen T_1 und T_2 heißen *interpretationsgleich*, wenn gilt:

$$\mathbb{I}^I(T_1) = \mathbb{I}^I(T_2).$$

Dies wird mit der Bezeichnungsweise $T_1 =_{\mathbb{I}} T_2$ ausgedrückt. $\Diamond$

Folgerung 2.67. *Gilt $T_1 : T_2$, so folgt auch $T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$.*

Beweis. Mit $T_1 : T_2$ gilt $\{\, x : T_1 \,\} \subseteq \{\, x : T_2 \,\}$. Daraus folgt aber die Behauptung mit $\mathbb{I}^I(\{\, x : T_1 \,\}) \subseteq \mathbb{I}^I(\{\, x : T_2 \,\})$. $\square$

Definition 2.68. Sei C eine endliche Menge von Infonen und $\dot{q} \in V_T$ ein Parameter zum Typ T. Dann bezeichnet ein Parameter $\dot{p} \in V_T$ mit

$$\dot{p} = \dot{q} \restriction C \tag{2.63}$$

einen *eingeschränkten Parameter*. Taucht der Parameter $\dot{p}$ nicht in mindestens einem der Infone aus C als freier Parameter auf, so handelt es sich um eine ausgeartete Definition eines eingeschränkten Parameters.

Sollte C nur aus dem einzigen Infon σ bestehen, so kann der eingeschränkte Parameter auch durch $\dot{q} \restriction \sigma$ beschrieben werden. $\Diamond$

Definition 2.69. Ein Parameter $\dot{p}$ *kommt* in einem eingeschränkten Parameter $\dot{q} \restriction C$ *vor*, wenn $\dot{p} = \dot{q}$ oder $\dot{p}$ in C vorkommt. $\Diamond$

Definition 2.70. Sei $\dot{p} = \dot{q} \upharpoonright C$ ein eingeschränkter Parameter und s eine Situation. Eine Funktion f heißt ein *Anker* für $\dot{p}$ in s, wenn gilt:

1. f ist ein Anker für $\dot{q}$ und für jeden Parameter, der in C frei vorkommt;
2. für jedes Infon $\sigma \in C$ gilt: $s \models \sigma[f]$.
3. $f(\dot{p}) = f(\dot{q})$. $\Diamond$

Bemerkung 2.71. Ersetzt man in einer Infonmenge $I(\dot{v}_1)$ den Parameter $\dot{v}_1$ durch $\dot{v}_2$, so erhält man eine Infonmenge $I(\dot{v}_2)$ und es gilt nicht zwangsläufig

$$\dot{v}_1 \upharpoonright I(\dot{v}_1) = \dot{v}_2 \upharpoonright I(\dot{v}_2). \tag{2.64}$$

Andererseits ist

$$[\, \dot{v}_1 \mid s \models I(\dot{v}_1)\,] =_d [\, \dot{v}_2 \mid s \models I(\dot{v}_2)\,]. \tag{2.65}$$

Die Argumentstellen von Typen sind also keine Parameter, auch wenn sie mit Hilfe solcher definiert werden können. Bezeichnet werden Argumentstellen eines Typs mit $\arg_T$ für eine einzige oder $\arg_T^1$ bis $\arg_T^n$ für n Argumentstellen.

Definition 2.72. Sei $I \subseteq \mathfrak{I}$ eine Menge von Infonen und w eine Welt. Die Situation

$$s(I) := \bigcap \{\, s \in \mathfrak{S} \mid s \models I[f], f \text{ ist ein Anker von } I \text{ an } w \,\} \tag{2.66}$$

definiert die *Situation zu* I. $\Diamond$

Definition 2.73. Sei $w = (W, F)$ eine Welt, Γ eine Menge parametrischer Infone und $a \in W$ ein Objekt der Welt. Die Situation

$$\begin{aligned} \mathrm{Oracle}_{\Gamma}(a) := s\big(\{\, \sigma[f] \bigm| w \models \sigma[f], \sigma \in \Gamma, \\ f \text{ ist Anker an } w, a \in \mathrm{Act}(\sigma[f]) \,\}\big) \end{aligned} \tag{2.67}$$

heißt *Orakel* von a bezüglich der Menge Γ.

Sei nun $A \subseteq W$ eine Menge von Objekten der Welt. Die Situation

$$\mathrm{Oracle}_{\Gamma}(A) := \bigcap_{a \in A} \Big(\mathrm{Oracle}_{\Gamma}(a) \cup \big(A \setminus \{\, a \,\}, \{\, w_x(t) \bigm| x \in A \setminus \{\, a \,\} \,\} \big)\Big) \tag{2.68}$$

heißt *Orakel der Menge* A bezüglich der Menge Γ. $\Diamond$

2.4.2 Definition

Definition 2.74. Sei w eine Welt. *Zusammengesetzte Infone* werden induktiv definiert:

1. Ein elementares Infon ist gleichzeitig auch ein zusammengesetztes Infon.
2. Wenn σ_1 und σ_2 zusammengesetzte Infone sind, so sind auch ihre *Konjunktion* $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ und ihre *Disjunktion* $(\sigma_1 \vee \sigma_2)$ zusammengesetzte Infone.
3. Sei $\dot{x}$ ein passender Parameter zur Menge U, der in σ frei vorkommt, so sind mit σ auch $\forall(\dot{x} \in U)\sigma$ und $\exists(\dot{x} \in U)\sigma$ zusammengesetzte Infone. Der Parameter $\dot{x}$ heißt in diesem Fall *gebundener Parameter*.
4. Mit σ ist auch $\overline{\sigma}$ ein zusammengesetztes Infon.

Ein Parameter kommt in einem zusammengesetzten Infon σ' frei vor, wenn er in einem seiner Bestandteile frei vorkommt und nicht gemäß Punkt 3 gebunden wird.

Nur solche, die gemäß den Punkten 1 bis 4 gebildet wurden, heißen zusammengesetzte Infone. ♢

Definition 2.75. Sei $\dot{x} : T$ ein Parameter zum Typ T und $U \subseteq \mathbb{I}^I(D_T)$ eine passende Menge von Objekten zu diesem Typ T. Weiterhin seien s eine Situation und σ ein Infon, in dem der Parameter $\dot{x}$ frei vorkommt. Für den *Existenzquantor* wird definiert:

$$s \models \exists(\dot{x} \in U)\sigma \tag{2.69}$$

genau dann, wenn es einen Anker f von $\dot{x}$ an ein Element $x \in U$ gibt, so dass $s \models \sigma[f]$.

Für den *Allquantor* wird entsprechend definiert:

$$s \models \forall(\dot{x} \in U)\sigma \tag{2.70}$$

genau dann, wenn es zu jedem Element $x \in U$ einen Anker f von $\dot{x}$ an x gibt, so dass $s \models \sigma[f]$.

Bezüglich der Dualisierung wird

$$\overline{\exists(\dot{x} \in U)\sigma} = \forall(\dot{x} \in U)\overline{\sigma}, \tag{2.71a}$$

$$\overline{\forall(\dot{x} \in U)\sigma} = \exists(\dot{x} \in U)\overline{\sigma} \tag{2.71b}$$

festgelegt. ♢

Bemerkung 2.76. Unter Umständen kann es sinnvoll sein noch weitere Quantoren, wie „die Meisten“ oder „wenige“ zu definieren. Arbeitet man mit erweiterten Logiken gemäß Beispiel 2.17, so ist es jedoch nicht immer notwendig dafür den Formalismus zu erweitern. Häufig reicht es aus, Infone der Form $\langle\!\langle M, U, S, T, l, t, i\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$ zu betrachten. Im Falle von „den Meisten“ drückt dieses Infon für $i = 1$ aus, dass die meisten Objekte vom Typ S in U (am Ort l zur Zeit t) auch vom Typ T sind. Für $i = 0$ drückt das Infon aus, dass eben nicht die meisten Objekte vom Typ S in U (am Ort l zur Zeit t) auch vom Typ T sind. Diese Arbeitsweise ließe sich dann auch verwenden, um die beiden hier definierten Quantoren zu beschreiben.

Bemerkung 2.77. Betrachten wir nun eine n-stellige Relation R, von der aber im Infon $\sigma = \langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, i\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$ nur die ersten m ($m < n$) Stellen mit bestimmten Objekten besetzt sind. Wird dieses Infon von einer Situation akzeptiert, so entspricht das für $i = 1$ der Aussage:

$$s \models \exists(\dot{x}_{m+1}, \ldots, \dot{x}_n \in s)\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_m, \dot{x}_{m+1}, \ldots, \dot{x}_n, 1\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}, \tag{2.72}$$

beziehungsweise im dualen Fall:

$$s \models \forall(\dot{x}_{m+1}, \ldots, \dot{x}_n \in s)\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_m, \dot{x}_{m+1}, \ldots, \dot{x}_n, 0\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}. \tag{2.73}$$

Definition 2.78. Seien σ_1 und σ_2 zwei Infone und s eine Situation. Die Konjunktion $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ zweier Infone wird durch s genau dann akzeptiert ($s \models (\sigma_1 \wedge \sigma_2)$), wenn $s \models \sigma_1$ und $s \models \sigma_2$.

Ebenso wird die Disjunktion $(\sigma_1 \vee \sigma_2)$ von s genau dann akzeptiert ($s \models (\sigma_1 \vee \sigma_2)$), wenn $s \models \sigma_1$ oder $s \models \sigma_2$.

Für die Dualisierung werden die Regeln

$$\overline{(\sigma_1 \wedge \sigma_2)} = (\overline{\sigma}_1 \vee \overline{\sigma}_2), \tag{2.74a}$$

$$\overline{(\sigma_1 \vee \sigma_2)} = (\overline{\sigma}_1 \wedge \overline{\sigma}_2) \tag{2.74b}$$

festgelegt. ◊

Folgerung 2.79. *Auch für zusammengesetzte Infone gilt* $\overline{\overline{\sigma}} = \sigma$.

Beweis. Betrachten wir die einzelnen Punkte von Definition 2.74 induktiv. Zunächst wurde die geforderte Eigenschaft schon mit den Folgerungen 2.24 und 2.35 für Punkt 1 von Definition 2.74 (Seite 59) gezeigt.

Betrachten wir nun Punkt 2 derselben Definition. Dann gilt

$$\overline{\overline{(\sigma_1 \wedge \sigma_2)}} = \overline{(\overline{\sigma}_1 \vee \overline{\sigma}_2)} = (\overline{\overline{\sigma}}_1 \wedge \overline{\overline{\sigma}}_2) = (\sigma_1 \wedge \sigma_2)$$

entsprechend Definition 2.78. Analog lässt sich $\overline{\overline{(\sigma_1 \vee \sigma_2)}} = (\sigma_1 \vee \sigma_2)$ zeigen.

Ebenso folgt aus Definition 2.75, bei Bezeichnung entsprechend dieser Definition:

$$\overline{\overline{\exists(\dot{x} \in U)\sigma}} = \overline{\forall(\dot{x} \in U)\overline{\sigma}} = \exists(\dot{x} \in U)\overline{\overline{\sigma}} = \exists(\dot{x} \in U)\sigma.$$

Der Beweis für $\overline{\overline{\forall(\dot{x} \in U)\sigma}} = \forall(\dot{x} \in U)\sigma$ erfolgt analog.

Damit ist die Aussage schon bewiesen, denn für Punkt 4 folgt aus $\overline{\overline{\sigma}} = \sigma$ sofort auch die duale Variante $\overline{\overline{\overline{\sigma}}} = \overline{\sigma}$. □

Folgerung 2.80. *Sei Σ eine Signatur, w eine Welt und $\mathbb{I}$ eine passende Interpretation zwischen beiden. Weiterhin existieren zwei Relationen R und S mit geeigneten Objekten $a_1, \ldots, a_n$, für die eine Menge M mit $\mathbb{I}^R(R) \cup \mathbb{I}^R(S) \subseteq M$ existiert.*

Dann gelten für eine Situation s unter der Voraussetzung

$$\mathbb{I}^R(R \cap S) := \mathbb{I}^R(R) \cap \mathbb{I}^R(S) \text{ und } \mathbb{I}^R(R \cup S) := \mathbb{I}^R(R) \cup \mathbb{I}^R(S) \tag{2.75}$$

die beiden Bedingungen

$$\begin{gathered} s \models (\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \\ \text{genau dann, wenn } s \models \langle\!\langle R \cap S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle \text{ und} \end{gathered} \tag{2.76a}$$

$$\begin{gathered} s \models (\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \\ \text{genau dann, wenn } s \models \langle\!\langle R \cup S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle, \end{gathered} \tag{2.76b}$$

falls die Interpretationen der Tupel zu allen Infonen gleich sind, also gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) &= \mathbb{I}^T(\langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \\ &= \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R \cap S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \\ &= \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R \cup S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle), \end{aligned} \tag{2.77}$$

und falls eine entsprechende Relation $Q = R \cap S$ beziehungsweise $P = R \cup S$ in der Signatur vorhanden ist.

Beweis. Als erstes stellen wir fest, dass Punkt 2 und Gleichung (2.31) von Punkt 1 aus Definition 2.27 (Seite 37) entweder für alle beteiligten Infone oder für keines der beteiligten Infone erfüllt sind. Dies folgt aus der gleichen Interpretation des Tupels. Im Folgenden nehmen wir an, diese Bedingungen seien erfüllt. Andernfalls wird keines der beteiligten Infone durch die Situation s akzeptiert. In diesem Fall gilt also die Aussage.

Betrachten wir nun den Fall (2.76a). Es gilt:

$$\begin{gathered} s \models (\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \text{ genau dann, wenn} \\ s \models \langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle \text{ und } s \models \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle \text{ genau dann, wenn} \\ \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(R) \text{ und } \mathbb{I}^T(\langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(S). \end{gathered}$$

Wegen (2.77) ist dies genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(R) \text{ und } \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(S),$$

also genau dann, wenn

$$\begin{gathered} \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(R) \cap \mathbb{I}^R(S), \text{ also} \\ \mathbb{I}^T(\langle\!\langle Q, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(Q). \end{gathered}$$

Dies ist aber genau die Aussage.

Betrachten wir nun:

$$\begin{gathered} s \vDash (\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \text{ genau dann, wenn} \\ s \vDash \langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle \text{ und } s \vDash \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle \text{ genau dann, wenn} \\ \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(R) \text{ und } \mathbb{I}^T(\langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(S). \end{gathered}$$

Wegen (2.77) ist dies genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(R) \text{ und } \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(S),$$

also genau dann, wenn

$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(R) \cup \mathbb{I}^R(S), \text{ also } \mathbb{I}^T(\langle\!\langle P, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(P).$$

Damit ist auch (2.76b) gezeigt. □

Bemerkung 2.81. Sei I eine Menge von Infonen, in denen die Parameter $\dot{p}$ und $\dot{q}$ vorkommen. Dann sind offensichtlich die drei Bedingungen

$$\begin{gathered} \text{für alle } x \in M \text{ gilt: } s \vDash I[f] \text{ mit } f(\dot{p}) = x \text{ und } f(\dot{q}) = y, \\ s \vDash \{\, \sigma[f] \mid \sigma \in I, f(\dot{p}) \in M, f(\dot{q}) = y \,\}, \\ s \vDash \forall(\dot{p} \in M) I[f] \text{ mit } f(\dot{p}) = \dot{p} \text{ und } f(\dot{q}) = y. \end{gathered} \tag{2.78}$$

für eine beliebige Menge M von Objekten äquivalent, die eine der Bedingungen aus (2.78) erfüllt. Aus diesem Grunde werden wir im Folgenden die Typen

$$\begin{aligned} &[\,\dot{q} \mid \text{für alle } x \in M : s \vDash I[f] \text{ mit } f(\dot{p}) = x \text{ und } f(\dot{q}) = \dot{q}\,], \\ &[\,\dot{q} \mid s \vDash \{\, \sigma[f] \mid \sigma \in I, f(\dot{p}) \in M, f(\dot{q}) = \dot{q} \,\}\,] \text{ und} \\ &[\,\dot{q} \mid s \vDash \forall(\dot{p} \in M) I[f] \text{ mit } f(\dot{p}) = \dot{p} \text{ und } f(\dot{q}) = \dot{q}\,] \end{aligned}$$

als identisch bezüglich der Definitionsgleichheit betrachten. Gleiches gilt für den Existenzquantor.

Bemerkung 2.82. Keith Devlin bezeichnet nur die elementaren als die eigentlichen Infone. Dies wirkt aus der Sicht der Welt auf den ersten Blick sehr willkürlich. Beschränkt man sich aber auf eine Signatur und eine Interpretation, so gibt es unter Umständen Infone, die nicht elementar darstellbar sind, aber mit Hilfe von anderen als zusammengesetzte Infone umschrieben werden können.

Folgerung 2.83. *Seien s eine Situation und σ_1 und σ_2 zwei (zusammengesetzte) Infone. Dann folgt aus $s \vDash \sigma_1$ sofort $s \vDash (\sigma_1 \vee \sigma_2)$.*

2.5 Bindungen

Ein weiterer Begriff der Situationstheorie ist die Bindung. Wir werden sie im Folgenden nicht weiter benötigen, insofern sollen sie hier nur der Vollständigkeit halber mit aufgeführt werden.

Bindungen sind logische Verknüpfungen zwischen Situationen, typischerweise Situationstypen. Sie stellen das situationstheoretische Pendant zur prädikatenlogischen Implikation dar. Eine Bindung C wird in der Form

$$C = [\, S_1 \Longrightarrow S_2 \,] \tag{2.79}$$

dargestellt, wobei S_1 und S_2 Situationstypen sind. Für alle Bindungen gibt es Hintergrundbedingungen. Diese Voraussetzungen sollen sicherstellen, dass eine Bindung keine Fehlinformationen übermittelt. Leider sind sie oft nur schwer zu fassen und noch viel schwerer formal zu beschreiben.

In (Devlin 1993) werden die Bindungen folgendermaßen klassifiziert:

noministische Bindung Bindungen, die zu Naturgesetzen gehören.

reflexive Bindung Bindungen, die Informationen über ein und dieselbe Situation bringen

notwendige Bindung Bindungen, die vom Individuationsschema herstammen, also vom Akteur schematisch realisiert werden, ohne dass dazu Informationen verarbeitet werden.

konventionelle Bindung Kein Naturgesetz, kann zu Fehlinterpretation führen.

linguistische Bindung Konventionelle Bindung zur Sprache, ist allgemein bekannt.

Akteure können auf Bindungen abgestimmt sein; das heißt sie passen ihr Verhalten an die Bindung an. Wenn ein Akteur eine Situation vom Typ S_1 individuiert oder diskriminiert, reagiert er genau so, wie er reagieren würde, hätte er eine Situation vom Typ S_2 individuiert beziehungsweise diskriminiert. Ein typisches Beispiel ist der Pawlowsche Reflex, wo in einer Situation s eine Glocke läutet, was bei einem darauf abgestimmten Hund einen Speichelfluss auslöst, weil dies per Konvention dann geschieht, wenn s eine solche Situation ist, in der der Hund gefüttert wird.

Beispiel 2.84. Auch hier soll uns der Weg noch einmal ganz an den Anfang des Kapitels zu dem Beispiel aus Abschnitt 2.2 führen.

Seien die Infone

$$\langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, 1\rangle\!\rangle \text{ und}$$
$$\langle\!\langle \text{oberhalb}, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, 1\rangle\!\rangle$$

gegeben. Dann existiert ein Zusammenhang zwischen diesen beiden. Betrachten wir nun die beiden Situationstypen

$$S_a = [\,\dot{s} \mid \dot{s} \models \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow \dot{w}_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow \dot{w}_2, 1\rangle\!\rangle\,] \text{ und} \tag{2.80a}$$
$$S_b = [\,\dot{s} \mid \dot{s} \models \langle\!\langle \text{oberhalb}, \mathit{unten} \rightsquigarrow \dot{w}_2, \mathit{oben} \rightsquigarrow \dot{w}_1, 1\rangle\!\rangle\,]. \tag{2.80b}$$

Dann existiert die Bindung $[\,S_a \implies S_b\,]$, wobei hier $s_1 : S_a$ und $s_1 : S_b$ gilt. Es handelt sich hierbei also um eine reflexive Bindung.

3 Situationstheoretische Darstellung der Formalen Begriffsanalyse

3.1 Welt als Kontext

Betrachtet man eine Welt $w = (W, F)$ zu einem festen Zeitpunkt $t \in T$, so kann man sie auch als einen mehrwertigen Kontext verstehen. Hierbei übernehmen die Eigenschaftsfunktionen $w_x^e(t)$ die Rolle der Merkmalausprägungen. Die Gegenstände bilden die Menge W der Objekte der Welt und die Merkmale die Menge E der Eigenschaften der Welt.

Definition 3.1. Sei $w = (W, F)$ eine Welt, wobei

$$F = \left\{\, w_x(t) \;\middle|\; x \in W \,\right\} = \left\{\, \big(w_x^e(t)\big)_{e \in E} \;\middle|\; x \in W \,\right\}$$

gilt.

Dann heißt ein mehrwertige Kontext

$$\mathbb{K}_t(w) := (W, E, M, \kappa) \tag{3.1}$$

mit

$$M := \{\, w_x^e(t) \mid e \in E, x \in W \,\}, \tag{3.2}$$

$$\kappa \subseteq W \times E \times M, \tag{3.3}$$

$$(x, e, w') \in \kappa \text{ genau dann, wenn } w' = w_x^e(t) \tag{3.4}$$

Kontext zur Welt w zum Zeitpunkt t. ◊

Betrachtet man den Begriffsverband zu einem solchen Kontext, so kann man bei einer entsprechenden Signatur auch immer einen Objekttyp definieren, der einem Begriff des Verbandes entspricht. Voraussetzung dafür ist lediglich, dass es eine Relation R gibt, die bei der Interpretation genau auf die Relation der Objekte abgebildet wird, die diese Merkmale besitzen. Dafür gibt es nun vielfältige Möglichkeiten. Eine davon werden wir in diesem Kapitel näher betrachten.

Will man allerdings zu einem gegebenen Objekttyp einen Begriff suchen, so kann es durchaus passieren, dass weder eine geeignete Gegenstandsmenge noch eine geeignete Merkmalsmenge für einen solchen Begriff existiert. Das demonstriert unter anderem das Beispiel 3.4 auf Seite 66.

Definition 3.2. Sei $\{\mathbb{K}_t \mid t \in T\}$ eine Familie von mehrwertigen Kontexten mit $\mathbb{K}_t = (G_t, M_t, W_t, \kappa_t)$. Die Welt $w(\{\mathbb{K}_t \mid t \in T\}) = (G, F)$ mit

$$G = \bigcup_{t \in T} G_t, \qquad M = \bigcup_{t \in T} M_t, \tag{3.5}$$

$$w_g^m(t) := \begin{cases} w, & \text{für } (g, m, w) \in \kappa \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \tag{3.6}$$

$$F := \left\{ \left(w_g^m(t)\right)_{m \in M} \,\middle|\, g \in G \right\} \tag{3.7}$$

heißt *Welt zur Kontextfamilie* $\{\mathbb{K}_t \mid t \in T\}$. Besteht die Familie nur aus dem Kontext $\mathbb{K}$, so heißt die Welt

$$w(\mathbb{K}) = (G, F) \tag{3.8}$$

Welt zum Kontext $\mathbb{K}$. $\Diamond$

Bemerkung 3.3. Ein einwertiger Kontext $\mathbb{K} = (G, M, \kappa)$ kann zu einem mehrwertigen Kontext $\mathbb{K}' = (G, M, M, \kappa')$ erweitert werden, indem man

$$(g, m, m) \in \kappa' \text{ genau dann, wenn } g\ \kappa\ m \tag{3.9}$$

setzt.

Beispiel 3.4. Sei $w(\mathbb{K})$ die Welt zum Kontext aus Abbildung 3.1. Weiterhin seien Signatur und Interpretation so beschaffen, dass für jeden Gegenstand aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ein entsprechendes Individuum mit derselben Bezeichnung in D_{IND} existiert, also

$$D_{IND} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Weiterhin sei

$$\mathfrak{R} = \{R_a, R_b, R_c, R_d, R_e, R_f, R_g, R_h, R_i\}.$$

Zu jedem $x \in \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ werde die Relation R_x so interpretiert, dass

$$w \models \langle\!\langle R_x, y, 1 \rangle\!\rangle \text{ genau dann, wenn } y\ \kappa\ x.$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	×	×					×		
2	×	×					×	×	
3	×	×	×				×	×	
4	×		×				×	×	×
5	×	×		×		×			
6	×	×	×	×		×			
7	×		×	×	×				
8	×		×	×		×			

Abbildung 3.1: Beispielkontext

Dies bedeutet speziell:

$$\mathbb{I}^I(x) = x,$$
$$\mathbb{I}^R(R_y) = y^\kappa \times \{ y \},$$
$$\mathbb{I}^T \langle\!\langle R_y, x, i \rangle\!\rangle = (x, w_x^y(t)).$$

Dann gilt für den Typ T_1 mit

$$T_1 = [\, \dot{p} \mid w \vDash (\langle\!\langle R_b, \dot{p}, 1 \rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle R_c, \dot{p}, 0 \rangle\!\rangle \,]) :$$

$$\{ x \mid x : T_1 \} = \{ 1, 2, 5 \},$$
$$(\{ 1, 2, 5 \}^{\kappa\kappa}, \{ 1, 2, 5 \}^{\kappa}) = (\{ 1, 2, 3, 5, 6 \}, \{ a, b \}).$$

Andererseits erfasst der Typ T_2 mit

$$T_2 = [\, \dot{p} \mid w \vDash (\langle\!\langle R_a, \dot{p}, 1 \rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle R_b, \dot{p}, 1 \rangle\!\rangle \,]) :$$

genau die Merkmale (in der Definition) und die Gegenstände

$$\{ g \mid g : T_2 \} = \{ 1, 2, 3, 5, 6 \}$$

(in der Auswirkung) des obigen Begriffes.

3.2 Erweiterung des Kontextes

In der formalen Begriffsanalyse werden Gegenstände und Merkmale dual zueinander betrachtet. Dies beinhaltet auch eine gewisse Gleichberechtigung zwischen beiden Mengen, wie sie unter anderem durch die Äquivalenz

$$\mathfrak{B}(G, M, \kappa_G) \cong \mathfrak{B}(M, G, \kappa_G^{-1}) \text{ mit } m\ \kappa_G^{-1}\ g \text{ genau dann, wenn } g\ \kappa_G\ m \tag{3.10}$$

ausgedrückt wird. Näheres dazu ist in (Ganter und Wille 1996) zu finden.

Im folgenden werden wir versuchen, dies auf unsere Theorie zu übertragen. Dazu ist es jedoch notwendig, sowohl Gegenstände, als auch Merkmale als Objekte in der Welt zur Verfügung zu haben. Dies bedeutet entsprechend Definition 3.2 (Seite 66), dass im Ausgangs-Kontext für die Welt alle Merkmale auch Gegenstände sind. Andererseits soll durch diese Erweiterung der Begriffsverband nicht verändert werden. Die hier beschriebene Methode der Kontext-Erweiterung hat den angenehmen Nebeneffekt, das Gegenstands- und Merkmals-Begriff eines Merkmals identisch sind, also im Liniendiagramm an derselben Stelle auftauchen.

Dazu bilden wir aus unserem Ausgangs-Kontext

$$\mathbb{K}_G = (G, M, \kappa_G) \tag{3.11}$$

einen erweiterten Kontext

$$\mathbb{K} = \frac{\mathbb{K}_G}{\mathbb{K}_M} = (G \,\dot{\cup}\, M, M, \kappa_G \cup \kappa_M) \tag{3.12}$$

mit

$$\kappa_M = \bigcup_{m \in M} \{\, m \,\} \times m^{\kappa_G \kappa_G} \tag{3.13}$$

und

$$\mathbb{K}_M = (M, M, \kappa_M). \tag{3.14}$$

Abbildung 3.2 soll dies ein wenig verdeutlichen.

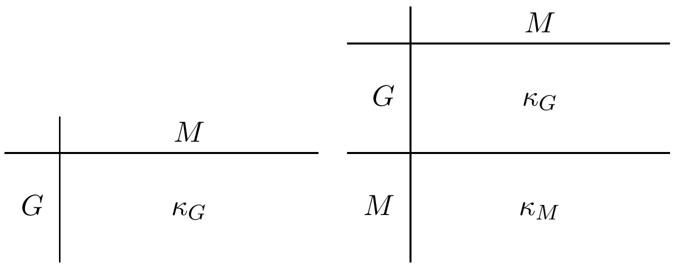
Die folgenden Gleichungen lassen sich für diesen Kontext leicht nachrechnen:

$$\kappa = \kappa_G \cup \kappa_M, \tag{3.15a}$$

$$A \subseteq G \,\dot{\cup}\, M : A^{\kappa} = (A \cap G)^{\kappa_G} \cap (A \cap M)^{\kappa_M}, \tag{3.15b}$$

$$B \subseteq M : B^{\kappa} = B^{\kappa_G} \,\dot{\cup}\, B^{\kappa_M}, \tag{3.15c}$$

$$(m, m') \in \kappa_M \text{ genau dann, wenn } m' \in m^{\kappa_G \kappa_G}. \tag{3.15d}$$



(a) $\mathbb{K}_G$ (b) $\mathbb{K}$

Abbildung 3.2: Ausgangs-Kontext $\mathbb{K}_G$ und erweiterter Kontext $\mathbb{K}$

Satz 3.5. *Seien* $\mathbb{K}_G = (G, M, \kappa_G)$ *und* $\mathbb{K} = (G \dot\cup M, M, \kappa_G \cup \kappa_M)$ *zwei Kontexte, die die Gleichungen* (3.11) *bis* (3.14) *erfüllen. Dann gilt für die zugehörigen Begriffsverbände*

$$\mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \cong \mathfrak{B}(\mathbb{K}). \tag{3.16}$$

Beweis. Es reicht aus, zwei Abbildungen γ und μ zu finden, die die Bedingungen des Hauptsatzes der Formalen Begriffsanalyse (Satz 1.14, Seite 17) erfüllen.

Betrachten wir also

$$\gamma\, g = \begin{cases} (g^{\kappa_G\kappa_G}, g^{\kappa_G}), & g \in G \\ (g^{\kappa_G}, g^{\kappa_G\kappa_G}), & g \in M \end{cases} \quad \text{und} \tag{3.17}$$

$$\mu\, m = (m^{\kappa_G}, m^{\kappa_G\kappa_G}), \tag{3.18}$$

so ist γ supremumdicht in $\mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$ und μ infimumdicht. Dies wird unter anderem im Beweis des Hauptsatzes (Ganter und Wille 1996) gezeigt (vergleiche auch Folgerung 1.15, Seite 17).

Aus demselben Beweis folgt auch für $g \in G$:

$$g\ \kappa\ m \text{ genau dann, wenn } \gamma\, g \sqsubseteq \mu\, m.$$

Für $g \in M$ und $m \in M$ sind entsprechend der Konstruktion von $\mathbb{K}$ die folgenden Aussagen äquivalent:

$$\begin{gathered} g\ \kappa\ m, \\ m \in g^{\kappa_M}, \\ m \in g^{\kappa_G\kappa_G}, \\ m^{\kappa_G\kappa_G} \subseteq g^{\kappa_G\kappa_G}, \\ (g^{\kappa_G}, g^{\kappa_G\kappa_G}) \sqsubseteq (m^{\kappa_G}, m^{\kappa_G\kappa_G}) \\ \text{und } \gamma\, g \sqsubseteq \mu\, m. \end{gathered}$$

Damit folgt für beliebige $g \in G \dot\cup M$ und beliebige $m \in M$:

$$\gamma\, g \sqsubseteq \mu\, m \text{ genau dann, wenn } g\ \kappa_G\ m. \qquad \square$$

Folgerung 3.6. *Aus dem Beweis zu Satz 3.5 folgt für $g \in M$:*

$$\gamma\, g = \mu\, g. \tag{3.19}$$

Beweis. Für $g = m$ folgt die Gleichheit aus (3.17) und (3.18). $\square$

Lemma 3.7. *Seien $\mathbb{K}_G = (G, M, \kappa_G)$ und $\mathbb{K} = (G \dot\cup M, M, \kappa_G \cup \kappa_M)$ zwei Kontexte, die die Gleichungen* (3.11) *bis* (3.14) *erfüllen. Dann gilt für zwei Mengen $A \subseteq G$ und $B \subseteq M$*

$$(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \text{ genau dann, wenn } (A \dot\cup B^{\kappa_M}, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}). \tag{3.20}$$

Beweis. Diesen Beweis führen wir in mehreren Schritten. Zu Beginn zeigen wir für die Abbildung $\varphi(A, B) := (A \dot\cup B^{\kappa_M}, B)$ die Aussage:

$$\varphi : \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}).$$

1. Sei zunächst $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$. Dann gilt $A \subseteq G$, also $A \cap M = \emptyset$ bezüglich $A \subseteq G \dot\cup M$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A^{\kappa\kappa} &= \big((A \cap G)^{\kappa_G} \cap (A \cap M)^{\kappa_M}\big)^{\kappa} \\ &= (A^{\kappa_G} \cap \emptyset^{\kappa_M})^{\kappa} \\ &= (A^{\kappa_G} \cap M)^{\kappa} \\ &= (A^{\kappa_G})^{\kappa_G} \dot\cup (A^{\kappa_G})^{\kappa_M} \\ &= A \dot\cup B^{\kappa_M} \end{aligned}$$

   damit ist $A \dot\cup B^{\kappa_M}$ Begriffsumfang in $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$.

2. Aus Punkt 1. folgt weiterhin:

$$\begin{aligned} (A \dot\cup B^{\kappa_M})^{\kappa} &= \big((A \dot\cup B^{\kappa_M}) \cap G\big)^{\kappa_G} \cap \big((A \dot\cup B^{\kappa_M}) \cap M\big)^{\kappa_M} \\ &= A^{\kappa_G} \cap B^{\kappa_M \kappa_M} \\ &= B, \end{aligned}$$

   da $B = B^{\kappa_G \kappa_G} = B^{\kappa_M}$. Damit folgt aus $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$ auch

$$(A \dot\cup B^{\kappa_M}, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}). \tag{3.21}$$

3. Nun muss noch gezeigt werden, dass die Abbildung $\varphi : \mathfrak{B}(\mathbb{K}_M) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ mit $\varphi(A, B) := (A \dot\cup B^{\kappa_M}, B)$ bijektiv ist.

   Die Injektivität ist offensichtlich, denn

$$\begin{aligned}(A_1 \dot\cup B_1^{\kappa_M}, B_1) = (A_2 \dot\cup B_2^{\kappa_M}, B_2) &\text{ genau dann, wenn}\\ B_1 = B_2 &\text{ genau dann, wenn}\\ (A_1, B_1) = (A_2, B_2).&\end{aligned} \tag{3.22}$$

   Es bleibt also die Surjektivität zu zeigen. Sei nun $(C, D) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$. Dann gilt

$$(C \cap G, D) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$$

   und

$$\varphi(C \cap G, D) = (C, D).$$

   Ersteres folgt aus

$$\begin{aligned} C \cap G &= (D^{\kappa_G} \dot\cup D^{\kappa_M}) \cap G \qquad (3.23)\\ &= (D^{\kappa_G} \cap G) \dot\cup (D^{\kappa_M} \cap G)\\ &= D^{\kappa_G},\\ D &= C^{\kappa} \qquad (3.24)\\ &= (C \cap G)^{\kappa_G} \cap (C \cap M)^{\kappa_M}\\ &= (C \cap G)^{\kappa_G} \cap D^{\kappa_M \kappa_M}.\end{aligned}$$

   Nun gilt für ein beliebiges Merkmal $g \in (G \dot\cup M) \cap M$:

$$\begin{aligned} g \in D^{\kappa_M} &\text{ genau dann, wenn } \forall d \in D : d \in g^{\kappa_G \kappa_G}\\ &\text{ genau dann, wenn } D \subseteq g^{\kappa_G \kappa_G}\\ m \in D^{\kappa_M \kappa_M} &\text{ genau dann, wenn } \forall g \in D^{\kappa_M} : m \in g^{\kappa_G \kappa_G}.\end{aligned}$$

   Damit folgt nun aus $n \in D^{\kappa_G \kappa_G}$ für alle Merkmale g mit $D \subseteq g^{\kappa_G \kappa_G}$:

$$n \in g^{\kappa_G \kappa_G}.$$

   Daraus lässt sich nun $n \in g^{\kappa_G \kappa_G}$ für alle Merkmale $g \in D^{\kappa_M}$ herleiten. Dies ist aber gleichbedeutend mit $n \in D^{\kappa_M \kappa_M}$. Also gilt: $D^{\kappa_G \kappa_G} \subseteq D^{\kappa_M \kappa_M}$.

   Damit folgt aus (3.24):

$$\begin{aligned} D &= (C \cap G)^{\kappa_G} \cap D^{\kappa_M \kappa_M}\\ &= D^{\kappa_G \kappa_G} \cap D^{\kappa_M \kappa_M}\\ &= D^{\kappa_G \kappa_G}.\end{aligned}$$

Zu guter Letzt erhalten wir:

$$\begin{aligned}\varphi(C \cap G, D) &= \big((C \cap G) \mathbin{\dot\cup} D^{\kappa_M}, D\big)\\ &= (D^{\kappa_G} \mathbin{\dot\cup} D^{\kappa_M}, D)\\ &= (D^{\kappa}, D)\\ &= (C, D).\end{aligned}$$

Weiterhin ist $\varphi^{-1}(C, D) = (C \cap G, D)$ injektiv. Dies lässt sich analog zu (3.22) zeigen. Aus der Injektivität der Identität $\varphi \circ \varphi^{-1}$ folgt die Surjektivität von φ und damit auch die Bijektivität von φ. Also ist φ^{-1} die inverse Abbildung zu φ. □

Lemma 3.8. *Seien* $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_G$ *und* $\mathbb{K}_M$ *Kontexte entsprechend den Gleichungen* (3.11) *bis* (3.14) *(Seite 68).*

Für jedes Merkmal $m \in M$ *sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:*

1. m *ist* $\sqcap$*-reduzibel in* $\mathbb{K}_G$*,*
2. m *ist* $\sqcap$*-reduzibel in* $\mathbb{K}$*,*

Gilt weiterhin für m *und für alle* $g \in G$

$$m^{\kappa_M} \neq g^{\kappa_G}, \tag{3.25}$$

so ist m *ist als Gegenstand genau dann* $\sqcup$*-reduzibel in* $\mathbb{K}_M$*, wenn Bedingung 1 erfüllt ist.*

Beweis. Mit Lemma 3.7 folgt sofort die Äquivalenz von 1 und 2 aus der Isomorphie der zugehörigen Begriffsverbände (siehe auch Ganter und Wille 1996, Kapitel 1.2). Die Äquivalenz der letzten Aussage lässt sich folgendermaßen beweisen:

Sei $g \in M$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g^{\kappa_M} &= X^{\kappa_M} \qquad \text{genau dann, wenn}\\ g^{\kappa_G\kappa_G} &= X^{\kappa_G\kappa_G} \qquad \text{genau dann, wenn}\\ g^{\kappa_G} &= g^{\kappa_G\kappa_G\kappa_G} = X^{\kappa_G\kappa_G\kappa_G} = X^{\kappa_G}.\end{aligned}$$

Damit lässt sich das Merkmal g in $\mathbb{K}_G$ als Infimum der Merkmalsbegriffe $\mu(X)$ darstellen. □

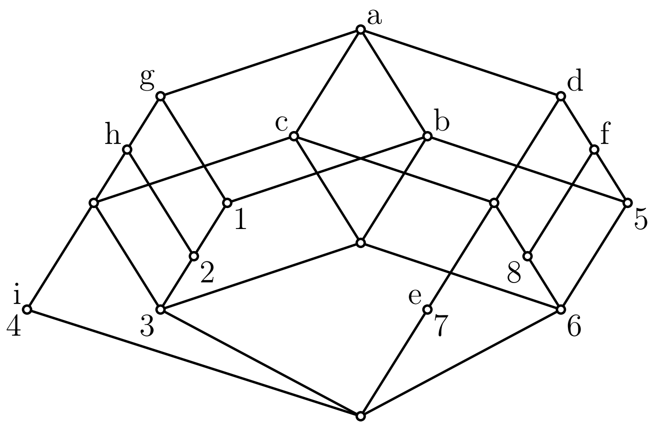


Abbildung 3.3: Begriffsverband zu den Kontexten $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_G$.

Beispiel 3.9. Betrachten wir noch einmal den Kontext $\mathbb{K}_G$ aus Beispiel 3.4 (Abbildung 3.1, Seite 67). In Abbildung 3.3 (Seite 73) ist das Liniendiagramm des Begriffsverbandes zum Kontext $\mathbb{K}_G$ zu sehen. Dabei wurden nur die Gegenstands- und Merkmalsbegriffe bezeichnet. Die Begriffsinhalte und -umfänge eines Begriffes ergeben sich aus den darunter liegenden Gegenstands- beziehungsweise aus den darüber liegenden Merkmalsbegriffen.

Will man den Kontext erweitern, wie es in diesem Kapitel beschrieben worden ist, so erhält man den Kontext $\mathbb{K}$ entsprechend Abbildung 3.4. Im oberen Teil findet sich der Kontext $\mathbb{K}_G$ wieder; der untere Teil bildet den Merkmalskontext $\mathbb{K}_M$.

Während der Begriffsverband des Gesamt-Kontextes $\mathbb{K}$ mit dem des Ausgangskontextes $\mathbb{K}_G$ identisch ist, zeigt Abbildung 3.5 den Begriffsverband $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_M)$ zum Merkmalskontext. Im Hintergrund wurde der Begriffsverband $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ eingezeichnet. Verfolgt man die aufwärts führenden Linien, so kann man deutlich erkennen, dass es zwar keine Verbandseinbettung, wohl aber eine Ordnungseinbettung des Verbandes $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_M)$ in $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ gibt. Letztere lässt sich aus der Isomorphie von $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$ und $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ herleiten.

3.3 Kontext als Welt

Wir kommen nun zur situationstheoretischen Darstellung des Kontextes. Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Begriffsverbände des erweiterten Kontextes $\mathbb{K}$ und des Ausgangskontextes $\mathbb{K}_G$ isomorph zueinander sind. Wir können uns also im Weiteren auf den Gesamt-Kontext $\mathbb{K}$ beziehen, ohne dabei die Ergebnisse zu verfälschen.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	×	×					×		
2	×	×					×	×	
3	×	×	×				×	×	
4	×		×				×	×	×
5	×	×		×		×			
6	×	×	×	×		×			
7	×		×	×	×				
8	×		×	×		×			
a	×								
b	×	×							
c	×		×						
d	×			×					
e	×		×	×	×				
f	×			×		×			
g	×						×		
h	×						×	×	
i	×		×				×	×	×

Abbildung 3.4: Erweiterter Beispielkontext

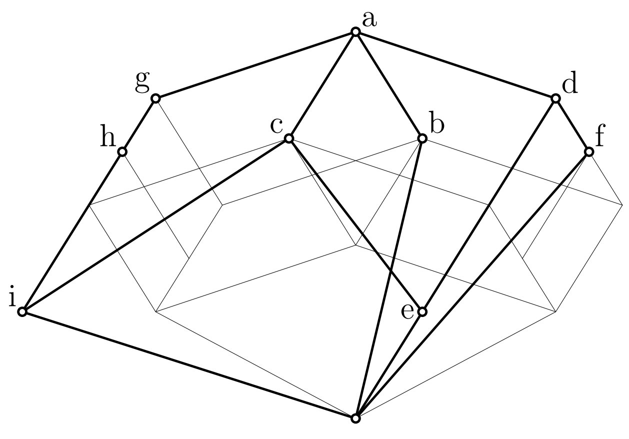


Abbildung 3.5: Liniendiagramm des Merkmalskontextes $\mathbb{K}_M$.

Die Welt $w(\mathbb{K})$ zum Kontext $\mathbb{K}$ haben wir schon in Definition 3.2 (Seite 66) beschrieben. Zunächst benötigen wir eine geeignete Signatur, in der wir unsere Welt beschreiben wollen.

Definition 3.10. Sei $\mathbb{K}_G = (G, M, \kappa_G)$ ein Kontext. Seien weiterhin

$$m, m_1, m_2 \in M, g \in G \text{ und}$$

$$w_g^m(t) := m, \text{ genau dann, wenn } g \; \kappa_G \; m, \tag{3.26}$$

$$w_{m_2}^{m_1}(t) := m_1, \text{ genau dann, wenn } m_1 \in m_2^{\kappa_G \kappa_G} \tag{3.27}$$

und mit $g' \in G \mathbin{\dot\cup} M$

$$w_{g'}(t) := \left(w_{g'}^m(t)\right)_{m \in M}. \tag{3.28}$$

Eine Struktur $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ mit

$$\breve{w}(\mathbb{K}_G) := \left(\{ g \in G \mathbin{\dot\cup} M \mid g^{\kappa_G} \neq \emptyset \}, \{ w_g(t) \mid g \in G \mathbin{\dot\cup} M, g^{\kappa_G} \neq \emptyset \}\right) \tag{3.29}$$

heißt *erweiterte Welt zum Kontext* $\mathbb{K}_G$. $\Diamond$

Folgerung 3.11. *Ist* $\mathbb{K}_G$ *ein Kontext, und sind* $\mathbb{K}_M$ *und* $\mathbb{K}$ *entsprechend* (3.11) *bis* (3.14) *definiert, so ist* $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ *eine Welt und es gilt*

$$\mathfrak{B}\Big(\mathbb{K}\big(\breve{w}(\mathbb{K}_G)\big)\Big) \cong \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \tag{3.30}$$

bei schlichter, nominaler Skalierung.

Beweis. In (3.29) wurden gerade die Gegenstände und Merkmale als Objekte der Welt definiert, die im Kontext $\mathbb{K}_G$ keine Leerzeilen und -spalten darstellen. Damit ist zu jedem Objekt mindestens eine Eigenschaftsfunktion und damit auch die Weltlinie für jeden Zeitpunkt t definiert. Also ist $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ eine Welt.

Sei nun

$$\mathfrak{B}\Big(\mathbb{K}\big(\breve{w}(\mathbb{K}_G)\big)\Big) = \mathfrak{B}(\{ g \in G \mathbin{\dot\cup} M \mid g^{\kappa_G} \neq \emptyset \}, M, \kappa).$$

Jedes Merkmal $m \in M$ kann in $\mathbb{K}\big(\breve{w}(\mathbb{K}_G)\big)$ in genau einer Ausprägung auftreten. Damit ergibt sich als Nominalskala für m der Kontext $\big(\{ m \}, \{ m \}, \{ (m, m) \}\big)$.

Also gilt für $g \in \{ g \in G \mathbin{\dot\cup} M \mid g^{\kappa_G} \neq \emptyset \}$ und $m_1, m_2 \in M$: $(g, m_1, m_2) \in \kappa_w$ in $\mathbb{K}\big(\breve{w}(\mathbb{K}_G)\big)$ genau dann, wenn $m_1 = m_2$ und $g \; \kappa \; m_1$ in $\mathbb{K}$. Es handelt sich also bei $\mathbb{K}\big(\breve{w}(\mathbb{K}_G)\big)$ um den Teilkontext von $\mathbb{K}$, bei dem genau die Leerzeilen und Vollspalten fehlen.

Um die Isomorphie der Begriffsverbände zu zeigen reicht es nun aus, die Reduzibilität der Leerzeilen in $\mathbb{K}$ zu beweisen. Es gilt aber für einen Gegenstand $g \in G$ des Kontextes $\mathbb{K}$ mit $g^\kappa = \emptyset$:

$$\begin{aligned}\gamma\, g &= \inf\{\, \gamma\, h \mid h \in G\,\} \\ &= \sup \emptyset.\end{aligned}$$

Für $m \in M$ mit $m^{\kappa_G} = \emptyset$ ist $m^{\kappa_G \kappa_G} = M$. Damit ergibt sich in $\mathbb{K}$ eine Vollzeile, welche reduzibel ist (siehe Ganter und Wille 1996, Kapitel 1.2). □

Nachdem wir die Welt festgelegt haben, können wir auch eine geeignete Signatur auswählen. Aus den verschiedenen Möglichkeiten wählen wir eine Signatur Σ und eine passende Interpretation $\mathbb{I}$ aus, wie sie in Definition 3.12 beschrieben werden.

Definition 3.12. Sei $\mathbb{K}_G$ ein Kontext und $\mathbb{K}$ der erweiterte Kontext entsprechend den Gleichungen (3.11) bis (3.14). Dann heißt die Signatur $\Sigma = (\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$ zur Welt $w(\mathbb{K})$ *Signatur zum Kontext* $\mathbb{K}$ und die Interpretation $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$ *Interpretation zum Kontext* $\mathbb{K}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existieren drei Typen T_G, T_M und IND mit

$$\mathbb{I}^I(a) \in G \text{ genau dann, wenn } a\!:\!T_G \tag{3.31a}$$

$$\mathbb{I}^I(b) \in M \text{ genau dann, wenn } b\!:\!T_M \tag{3.31b}$$

   und die Interpretation der Individuen ist surjektiv, das heißt, für jeden Gegenstand $g \in G$ existiert ein $a\!:\!T_G$ mit $\mathbb{I}^I(a) = g$ und für jedes Merkmal $m \in M$ existiert ein $b\!:\!T_M$ mit $\mathbb{I}^I(b) = m$. Weiterhin gelten $T_G\!:\!IND$ und $T_M\!:\!IND$.

2. Es existiert eine zweistellige Relation $R_\mathbb{K} \in \mathfrak{R}$, für die gilt:

$$\mathbb{I}^R(R_\mathbb{K}) = \kappa_G \quad \text{und} \tag{3.32}$$

$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle R_\mathbb{K}, a, b, i\rangle\!\rangle) = (a, b). \tag{3.33}$$

◊

Bemerkung 3.13. Bis zum Ende des Kapitels werden wir mit der Interpretation und der Signatur aus Definition 3.12 arbeiten. Auch dort, wo dies nicht explizit erwähnt wird. Alle Parameter und Individuen, bei denen der Typ nicht extra genannt wird, seien vom Typ IND.

Definition 3.14. Seien $A \subseteq D_{T_G}$ und $B \subseteq D_{T_M}$ zwei Mengen von Objekten der Welt $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ und κ_G die Inzidenzrelation des Kontextes $\mathbb{K}_G$. Dann werden die Operatoren ${}^{\kappa_G}$ folgendermaßen definiert:

$$A^{\kappa_G} := \big[\, \dot{q} \;\big|\; w \vDash \forall\big(\dot{p} \in \mathbb{I}^I(A)\big)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \,\big], \tag{3.34a}$$

$$B^{\kappa_G} := \big[\, \dot{p} \;\big|\; w \vDash \forall\big(\dot{q} \in \mathbb{I}^I(B)\big)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \,\big]. \tag{3.34b}$$

Für einen einzelnen Gegenstand $g : T_G$, ein einzelnes Merkmal $m : T_M$ oder einen einzelnen Typ werden die folgenden Schreibweisen vereinbart:

$$g^{\kappa_G} := \{\, g \,\}^{\kappa_G}, \tag{3.35}$$

$$m^{\kappa_G} := \{\, m \,\}^{\kappa_G} \quad \text{und} \tag{3.36}$$

$$T^{\kappa_G} := \{\, x : T \,\}^{\kappa_G}. \tag{3.37}$$

◊

Definition 3.15. Seien $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$ ein Begriff zum Kontext $\mathbb{K}_G$ und $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ die erweiterte Welt dazu, dann seien

$$T_G^A := [\, \dot{p} \mid w \vDash \forall(\dot{q} \in B)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \,], \tag{3.38a}$$

$$T_M^B := [\, \dot{q} \mid w \vDash \forall(\dot{p} \in A)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \,]. \tag{3.38b}$$

Dann heißt T_G^A der *Typ zum Begriffsinhalt* und T_M^B der *Typ zum Begriffsumfang*.

◊

Folgerung 3.16. *Sei (A, B) ein Begriff des Begriffsverbandes $\mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$. Dann gelten*

$$\mathbb{I}^I(T_G^A) = A \;\textit{und} \tag{3.39a}$$

$$\mathbb{I}^I(T_M^B) = B. \tag{3.39b}$$

Beweis. Es gilt: $x \in \mathbb{I}^I(T_G^A)$ genau dann, wenn ein Individuum $a \in D_{IND}$ mit $a : T_G^A$ so existiert, dass $\mathbb{I}^I(a) = x$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein solches Individuum a die folgende Bedingung erfüllt:

$$a : [\, \dot{p} \mid w \vDash \forall(\dot{q} \in B)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \,],$$

was gleichbedeutend mit

$$w \vDash \forall(\dot{q} \in B)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, a, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle$$

ist. Dies entspricht

$$w \vDash \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, a, q, 1 \rangle\!\rangle \text{ für alle } q \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(B).$$

Letzteres gilt genau dann, wenn für alle $q \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(B)$ gilt: $\mathbb{I}^I(a)\ \kappa_G\ \mathbb{I}^I(q)$, beziehungsweise wenn für alle $y \in B$ und $\mathbb{I}^I(a) = x$ gilt: $x\ \kappa_G\ y$.

Nun wurden Signatur und Interpretation so gewählt, dass die Individuen surjektiv interpretiert werden. Also existiert für jedes $y \in B$ ein Individuum $b : T_M$, so dass $y = \mathbb{I}^I(b)$ ist. Analog existiert auch zu jedem $x \in A$ ein $a : T_G$ mit $\mathbb{I}^I(a) = x$.

Folglich ist $x \in \mathbb{I}^I(T_G^A)$ genau dann, wenn für alle $y \in B$ gilt: $x\ \kappa_G\ y$. Dies ist aber gleichbedeutend mit $x \in B^{\kappa_G}$. Da für Begriffe $A = B^{\kappa_G}$ gilt, folgt die Aussage (3.39a).

Der Beweis für (3.39b) folgt analog. □

Lemma 3.17. *Unter den Voraussetzungen von Definition 3.14 (Seite 77) und bei Verwendung der Interpretation aus Definition 3.12 (Seite 76) gilt für einen beliebigen Typ $T : T_G$ oder $T : T_M$*

$$\mathbb{I}^I(T^{\kappa_G}) = \left(\mathbb{I}^I(T)\right)^{\kappa_G}. \tag{3.40}$$

Beweis. Zunächst zeigen wir die Behauptung für $T : T_G$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^I(T^{\kappa_G}) &= \mathbb{I}^I(\{\, x : [\, \dot{q} \mid w \vDash \forall(\dot{p} : T) \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \,] \,\}) \\
&= \mathbb{I}^I(\{\, x \mid \forall(p : T)\, w \vDash \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, p, x, 1 \rangle\!\rangle \,\}) \\
&= \mathbb{I}^I(\{\, x \mid \forall(p : T)\, \mathbb{I}^I(p)\ \kappa_G\ \mathbb{I}^I(x) \,\}) \\
&= \mathbb{I}^I(\{\, x \mid \mathbb{I}^I(x) \in (\mathbb{I}^I(T))^{\kappa_G} \,\}) \\
&= \left(\mathbb{I}^I(T)\right)^{\kappa_G}.
\end{aligned}$$

Damit wurde die Behauptung gezeigt. Für $T : T_M$ erfolgt der Beweis analog. □

Folgerung 3.18. *Seien $T_A : T_G$ und $T_B : T_M$ zwei Typen mit $\mathbb{I}^I(T_A) = A$ und $\mathbb{I}^I(T_B) = B$. Es gilt $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$ genau dann, wenn die folgenden beiden Gleichungen erfüllt sind:*

$$(T_A)^{\kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_B, \tag{3.41a}$$

$$(T_B)^{\kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_A. \tag{3.41b}$$

Beweis. 1. Aus $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$ folgen (3.41a) und (3.41b):

Es gelten:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^I\Big(\big(T_B\big)^{\kappa_G}\Big) &= \mathbb{I}^I\big([\,\dot{p} \mid w \models \forall(\dot{q} \in \mathbb{I}^I(T_B))\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle\,]\big) \\ &= \mathbb{I}^I\big([\,\dot{p} \mid w \models \forall(\dot{q} \in B)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle\,]\big) \\ &= \{\, g \in G \mid g\ \kappa_G\ m \text{ für alle } m \in B\,\} \\ &= B^{\kappa_G} = A = \mathbb{I}^I(T_A).\end{aligned}$$

Dual dazu folgt $(T_A)^{\kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_B$.

2. Aus (3.41a) und (3.41b) folgt $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$:

Sei $(T_A)^{\kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_B$. Wegen Lemma 3.17 gilt

$$\mathbb{I}^I(T_B) = \mathbb{I}^I\big((T_A)^{\kappa_G}\big) = \big(\mathbb{I}^I(T_A)\big)^{\kappa_G}.$$

Dies ergibt aber mit Folgerung 3.16 die Gleichung $B = A^{\kappa_G}$. Dual dazu folgt $A = B^{\kappa_G}$.

Somit wurde die geforderte Äquivalenz gezeigt. □

Bemerkung 3.19. Der Beweis zu Folgerung 3.18 zeigt für beliebige Mengen $A \subseteq G$ und $B \subseteq M$ die Äquivalenz von A^{κ_G} zu $\big(T_G^A\big)^{\kappa_G}$ und von B^{κ_G} zu $\big(T_M^B\big)^{\kappa_G}$.

Definition 3.20. Seien $T_1 = [\,\dot{p} \mid s_1 \models I_1\,]$ und $T_2 = [\,\dot{p} \mid s_2 \models I_2\,]$ zwei Typen. Weiterhin sei φ eine Hüllenfunktion auf der Menge der Infone. Dann werden die Operatoren $\sqcap_\varphi$ und $\sqcup$ folgendermaßen definiert:

$$T_1 \sqcup T_2 := [\,\dot{p} \mid s_1 \cup s_2 \models I_1 \cap I_2\,] \text{ und} \tag{3.42a}$$

$$T_2 \sqcap_\varphi T_2 := [\,\dot{p} \mid s_1 \cap s_2 \models \varphi(I_1 \cup I_2)\,]. \tag{3.42b}$$

◊

Definition 3.21. Seien $T_1 = [\,\dot{p} \mid s_1 \models I_1\,]$ und $T_2 = [\,\dot{p} \mid s_2 \models I_2\,]$ zwei Typen. Die Relation $\sqsubseteq_d$ wird definiert durch:

$$T_1 \sqsubseteq_d T_2 \text{ genau dann, wenn } T_1 \sqcup T_2 = T_2. \tag{3.43}$$

T_1 heißt dann *Untertyp* von T_2 und T_2 *Obertyp* zu T_1. Eine alternative Schreibweise hierfür ist $T_2 \sqsupseteq_d T_1$. Gelten $T_1 \sqsubseteq_d T_2$ und $T_2 \sqsubseteq_d T_1$ so schreibt man $T_1 =_d T_2$. ◊

Folgerung 3.22. *Ist* $T_1 \sqsubseteq_d T_2$, *so ist* $T_1 : T_2$.

Beweis. Gilt $T_1 \sqsubseteq_d T_2$, so gilt für $T_1 =_d [\dot{p} \mid s_1 \vDash I_1]$ und $T_2 =_d [\dot{p} \mid s_2 \vDash I_2]$ die Beziehung $T_1 \sqcup T_2 =_d T_2$. Dies bedeutet aber wiederum

$$[\dot{p} \mid s_1 \cup s_2 \vDash I_1 \cap I_2] =_d [\dot{p} \mid s_2 \vDash I_2].$$

Damit folgt: $I_2 \subseteq I_1$ und $s_1 \subseteq s_2$. Sei nun $a : T_1$. Dann existiert ein Anker f von I_1 an s_1 mit $f(\dot{p}) = \mathbb{I}^I(a)$. Damit ist f aber auch gleichzeitig ein Anker von I_2 an s_2, da für jedes Infon σ aus I_1 gilt $s_1 \vDash \sigma[f]$. Da $s_1 \subseteq s_2$ ist, akzeptiert s_2 auch jedes Infon, welches s_1 akzeptiert, also auch jedes $\sigma[f]$ mit $\sigma \in I_1$. Da für jedes a ein Anker von I_1 an s_1 existiert, ist derselbe Anker auch einer von I_2 an s_2. Damit gilt nun aber auch $a : T_2$. □

Lemma 3.23. *Seien* $T_1 : T_G$ *und* $T_2 : T_G$ *zwei Gegenstandstypen. Dann gilt*

$$T_1^{\kappa_G \kappa_G} \sqsubseteq_d T_2^{\kappa_G \kappa_G} \text{ genau dann, wenn } T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2. \tag{3.44}$$

Ebenso gilt für zwei Merkmalstypen $T_3 : T_M$ *und* $T_4 : T_M$

$$T_3^{\kappa_G \kappa_G} \sqsubseteq_d T_4^{\kappa_G \kappa_G} \text{ genau dann, wenn } T_3 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_4. \tag{3.45}$$

Beweis. Für die beiden Typen T_1 und T_2 gelten.

$$T_1^{\kappa_G \kappa_G} \sqsubseteq_d T_2^{\kappa_G \kappa_G}$$

genau dann, wenn

$$[\dot{p} \mid w \vDash \forall(\dot{q} : T_1^{\kappa_G})\langle\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\rangle] \sqsubseteq_d [\dot{p} \mid w \vDash \forall(\dot{q} : T_2^{\kappa_G})\langle\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\rangle]$$

genau dann, wenn

$$\{\langle\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, q, 1\rangle\rangle \mid q : T_1^{\kappa_G}\} \supseteq \{\langle\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, q, 1\rangle\rangle \mid q : T_2^{\kappa_G}\}$$

genau dann, wenn

$$\{q : T_1^{\kappa_G}\} \supseteq \{q : T_2^{\kappa_G}\},$$

daraus folgt

$$\mathbb{I}^I(\{q : T_1^{\kappa_G}\}) \supseteq \mathbb{I}^I(\{q : T_2^{\kappa_G}\}).$$

Dies bedingt

$$\mathbb{I}^I(\{\, p : T_1 \,\}) \subseteq \mathbb{I}^I(\{\, p : T_2 \,\}),$$

was sich analog aus dem eben gezeigten folgern lässt.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, dass aus

$$\mathbb{I}^I(\{\, p : T_1 \,\}) \subseteq \mathbb{I}^I(\{\, p : T_2 \,\}),$$

die Bedingung

$$\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\} \supseteq \{\, q : T_2^{\kappa_G} \,\}$$

folgt.

Aufgrund der Antitonie von ${}^{\kappa_G}$ folgt aus

$$\mathbb{I}^I(\{\, p : T_1 \,\}) \subseteq \mathbb{I}^I(\{\, p : T_2 \,\})$$

zunächst

$$\big(\mathbb{I}^I(\{\, p : T_1 \,\})\big)^{\kappa_G} \supseteq \big(\mathbb{I}^I(\{\, p : T_2 \,\})\big)^{\kappa_G}.$$

Mit Lemma 3.17 ergibt sich daraus

$$\mathbb{I}^I(\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\}) \supseteq \mathbb{I}^I(\{\, q : T_2^{\kappa_G} \,\}).$$

Andererseits ist aufgrund der Definition von $T_1^{\kappa_G}$

$$\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\} = \mathbb{I}^{I^{-1}}\big(\mathbb{I}^I(\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\})\big),$$

denn es gilt

$$\begin{gathered}
q' \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big(\mathbb{I}^I(\{\, p : T_1^{\kappa_G} \,\})\big) \text{ genau dann, wenn} \\
\mathbb{I}^I(q') \in \mathbb{I}^I(\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\}) \text{ genau dann, wenn} \\
\mathbb{I}^I(q') \in \big(\mathbb{I}^I(\{\, q : T_1 \,\})\big)^{\kappa_G} \text{ genau dann, wenn} \\
\text{für alle } x \in \mathbb{I}^I(\{\, q : T_1 \,\}) \text{ gilt } x \;\kappa_G\; \mathbb{I}^I(q') \text{ genau dann, wenn} \\
w \vDash \forall(\dot{p} : T_1)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, q', 1 \rangle\!\rangle \text{ genau dann, wenn} \\
q : T_1^{\kappa_G}.
\end{gathered}$$

Entsprechendes gilt für T_2. Da die Interpretation der Individuen $\mathbb{I}^I$ elementweise definiert wurde, verhält sie sich monoton bezüglich Mengen. Somit folgt

$$\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\} \supseteq \{\, q : T_2^{\kappa_G} \,\}.$$

Daraus folgt nun

$$T_1^{\kappa_G \kappa_G} \sqsubseteq_d T_2^{\kappa_G \kappa_G} \text{ genau dann, wenn } T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2.$$

Der Beweis für T_3 und T_4 erfolgt vollkommen analog. □

Satz 3.24. *Im Falle der Existenz aller Glieder gelten für drei Typen T_1, T_2 und T_3 die folgenden Bedingungen:*

$$T_1 \sqcap_\varphi T_1 \sqsubseteq_d T_1, \qquad T_1 \sqcup T_1 =_d T_1, \tag{3.46a}$$

$$T_1 \sqcap_\varphi T_2 =_d T_2 \sqcap_\varphi T_1, \qquad T_1 \sqcup T_2 =_d T_2 \sqcup T_1, \tag{3.46b}$$

$$T_1 \sqcap_\varphi (T_2 \sqcap_\varphi T_3) =_d (T_1 \sqcap_\varphi T_2) \sqcap_\varphi T_3, \qquad T_1 \sqcup (T_2 \sqcup T_3) =_d (T_1 \sqcup T_2) \sqcup T_3, \tag{3.46c}$$

$$T_1 \sqcap_\varphi (T_1 \sqcup T_2) \sqsubseteq_d T_1, \qquad T_1 \sqcup (T_1 \sqcap_\varphi T_2) =_d T_1. \tag{3.46d}$$

Gilt $I_1 = \varphi(I_1)$ für $T_1 =_d [\,\dot{p} \mid s_1 \vDash I_1\,]$, so gilt hierbei immer die Gleichheit.

Beweis. Es gelten (falls $s_1 \cap s_2$ existiert):

Für (3.46a):

$$\begin{aligned} T_1 \sqcup T_1 &=_d [\,\dot{p} \mid s_1 \cup s_1 \vDash I_1 \cap I_1\,] =_d [\,\dot{p} \mid s_1 \vDash I_1\,] =_d T_1. \\ T_1 \sqcap_\varphi T_1 &=_d [\,\dot{p} \mid s_1 \cap s_1 \vDash \varphi(I_1 \cup I_1)\,] \sqsubseteq_d [\,\dot{p} \mid s_1 \vDash I_1\,] =_d T_1, \end{aligned}$$

da $I_1 \subseteq \varphi(I_1)$ ist. Hier gilt offensichtlich im Falle $I_1 = \varphi(I_1)$ die Gleichheit $T_1 \sqcap_\varphi T_1 =_d T_1$.

Für (3.46b):

$$\begin{aligned} T_1 \sqcap_\varphi T_2 &=_d [\,\dot{p} \mid s_1 \cap s_2 \vDash \varphi(I_1 \cup I_2)\,] \\ &=_d [\,\dot{p} \mid s_2 \cap s_1 \vDash \varphi(I_2 \cup I_1)\,] \\ &=_d T_2 \sqcap_\varphi T_1. \\ T_1 \sqcup T_2 &=_d [\,\dot{p} \mid s_1 \cup s_2 \vDash I_1 \cap I_2\,] \\ &=_d [\,\dot{p} \mid s_2 \cup s_1 \vDash I_2 \cap I_1\,] \\ &=_d T_2 \sqcup T_1. \end{aligned}$$

Für (3.46c):

$$\begin{aligned} T_1 \sqcap_\varphi (T_2 \sqcap_\varphi T_3) &=_d T_1 \sqcap_\varphi [\,\dot{p} \mid s_2 \cap s_3 \vDash \varphi(I_2 \cup I_3)\,] \\ &=_d \big[\,\dot{p} \mid s_1 \cap (s_2 \cap s_3) \vDash \varphi\big(I_1 \cup \varphi(I_2 \cup I_3)\big)\,\big]. \end{aligned}$$

Da φ eine Hüllenfunktion ist, gilt:

$$\begin{aligned} &\varphi\big(I_1 \cup \varphi(I_2 \cup I_3)\big) \subseteq \varphi\big(\varphi(I_1 \cup I_2 \cup I_3)\big) = \varphi(I_1 \cup I_2 \cup I_3) \\ &\varphi\big(I_1 \cup \varphi(I_2 \cup I_3)\big) \supseteq \varphi(I_1 \cup I_2 \cup I_3), \end{aligned}$$

also

$$\varphi\big(I_1 \cup \varphi(I_2 \cup I_3)\big) = \varphi(I_1 \cup I_2 \cup I_3).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
T_1 \sqcap_\varphi (T_2 \sqcap_\varphi T_3) &=_d \big[\, \dot{p} \;\big|\; (s_1 \cap s_2) \cap s_3 \vDash \varphi\big(\varphi(I_1 \cup I_2) \cup I_3\big) \,\big] \\
&=_d [\, \dot{p} \mid s_1 \cap s_2 \vDash \varphi(I_1 \cup I_2) \,] \sqcap_\varphi T_3 \\
&=_d (T_1 \sqcap_\varphi T_2) \sqcap_\varphi T_3. \\
T_1 \sqcup (T_2 \sqcup T_3) &=_d T_1 \sqcup [\, \dot{p} \mid s_2 \cup s_3 \vDash I_2 \cap I_3 \,] \\
&=_d [\, \dot{p} \mid s_1 \cup (s_2 \cup s_3) \vDash I_1 \cap (I_2 \cap 3) \,] \\
&=_d [\, \dot{p} \mid (s_1 \cup s_2) \cup s_3 \vDash (I_1 \cap I_2) \cap I_3 \,] \\
&=_d [\, \dot{p} \mid s_1 \cup s_2 \vDash I_1 \cap I_2 \,] \sqcup T_3 \\
&=_d (T_1 \sqcup T_2) \sqcup T_3.
\end{aligned}$$

Für (3.46d):

$$\begin{aligned}
T_1 \sqcap_\varphi (T_1 \sqcup T_2) &=_d T_1 \sqcap_\varphi [\, \dot{p} \mid s_1 \cup s_2 \vDash I_1 \cap I_2 \,] \\
&=_d \big[\, \dot{p} \;\big|\; s_1 \cap (s_1 \cup s_2) \vDash \varphi\big(I_1 \cup (I_1 \cap I_2)\big) \,\big] \\
&=_d [\, \dot{p} \mid s_1 \vDash \varphi(I_1) \,] \\
&\sqsubseteq_d [\, \dot{p} \mid s_1 \vDash I_1 \,] =_d T_1.
\end{aligned}$$

Auch hier gilt wieder die Gleichheit für $\varphi(I_1) = I_1$.

$$\begin{aligned}
T_1 \sqcup (T_1 \sqcap_\varphi T_2) &=_d T_1 \sqcup [\, \dot{p} \mid s_1 \cap s_2 \vDash \varphi(I_1 \cup I_2) \,] \\
&=_d [\, \dot{p} \mid s_1 \cup (s_1 \cap s_2) \vDash I_1 \cap \varphi(I_1 \cup I_2) \,] \\
&=_d [\, \dot{p} \mid s_1 \vDash I_1 \,] =_d T_1,
\end{aligned}$$

da $I_1 \cup I_2 \subseteq \varphi(I_1 \cup I_2)$ und $I_1 \cap (I_1 \cup I_2) = I_1$ sind. □

Lemma 3.25. *Sei I eine Menge von Infonen zur erweiterten Welt $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ zum Kontext $\mathbb{K}_G$. Seien weiterhin*

$$\sigma := \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \text{ und } \Gamma = \{\, \sigma \,\} \text{ und} \tag{3.47}$$

$$O_G(I) := \mathrm{Oracle}_\Gamma\Big(\mathrm{Obj}\big(\mathrm{Oracle}_\Gamma(\mathrm{Obj}(I) \cap M)\big) \cap G\Big), \tag{3.48a}$$

$$O_M(I) := \mathrm{Oracle}_\Gamma\Big(\mathrm{Obj}\big(\mathrm{Oracle}_\Gamma(\mathrm{Obj}(I) \cap G)\big) \cap M\Big). \tag{3.48b}$$

Dann sind

$$\begin{aligned}\varphi(I) := I \cup \Bigg\{ \sigma[f] \;\Bigg|\; & O_G(I) \vDash \\ & \forall\Big(\dot{p} \in \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma\big(\mathrm{Obj}(I \cap M)\big)\Big) \cap G\Big)\sigma[f], f(\dot{q}) \in M, f(\dot{p}) = \dot{p} \Bigg\}\end{aligned} \tag{3.49a}$$

und

$$\begin{aligned}\psi(I) := I \cup \Bigg\{ \sigma[f] \;\Bigg|\; & O_M(I) \vDash \\ & \forall\Big(\dot{q} \in \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma\big(\mathrm{Obj}(I \cap G)\big)\Big) \cap M\Big)\sigma[f], f(\dot{q}) = \dot{q}, f(\dot{p}) \in G \Bigg\}\end{aligned} \tag{3.49b}$$

Hüllenfunktionen.

Beweis. Entsprechend Folgerung 1.7 reicht es, die Äquivalenz der Aussagen

$$I_1 \subseteq \varphi(I_2) \text{ und } \varphi(I_1) \subseteq \varphi(I_2) \tag{3.50}$$

für zwei Infonmengen I_1 und I_2 zu zeigen:

Aus $\varphi(I_1) \subseteq \varphi(I_2)$ folgt $I_1 \subseteq \varphi(I_2)$: Offensichtlich gilt:

$$I_1 \subseteq \varphi(I_1).$$

Damit folgt die Behauptung aus der Transitivität der Mengeninklusion.

Aus $I_1 \subseteq \varphi(I_2)$ folgt $\varphi(I_1) \subseteq \varphi(I_2)$: Sei $\sigma' \in \varphi(I_1)$. So gilt einer der beiden Fälle:

$$\begin{aligned}&\sigma' \in I_1 \text{ oder}\\ &\sigma' \in \varphi(I_1) \setminus I_1.\end{aligned}$$

Im ersteren Fall ist die Behauptung mit der Voraussetzung identisch. Betrachten wir also den Letzteren. Seien

$$\begin{aligned}s_1 &= (W_{s_1}, F_{s_1}) := O_G(I) \text{ und}\\ s_2 &= (W_{s_2}, F_{s_2}) := \mathrm{Oracle}_\Gamma(\mathrm{Obj}(I) \cap M).\end{aligned}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}W_{s_2} &= (\mathrm{Obj}(I) \cap M) \cup \{\, a \mid w \vDash \forall(\dot{q} \in \mathrm{Obj}(I) \cap M)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, a, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \,\}\\ &= (\mathrm{Obj}(I) \cap M) \cup \{\, x \in G \mid \forall y \in \mathrm{Obj}(I) \cap M : x \;\kappa_G\; y \,\}\\ &= (\mathrm{Obj}(I) \cap M) \cup (\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G}.\end{aligned}$$

Da G und M als disjunkt betrachtet werden, gilt entsprechend

$$W_{s_2} = (\mathrm{Obj}(I) \cap M) \mathbin{\dot\cup} (\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G}$$

Damit ergibt sich für s_1:

$$\begin{aligned}
W_{s_1} &= \mathrm{Obj}\big(O_G(I)\big)\\
&= \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma\Big(\mathrm{Obj}\big(\mathrm{Oracle}_\Gamma(\mathrm{Obj}(I) \cap M)\big) \cap G\Big)\Big)\\
&= \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma\Big(\big((\mathrm{Obj}(I) \cap M) \mathbin{\dot\cup} (\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G}\big) \cap G\Big)\Big)
\end{aligned}$$

und, da G und M per definitionem disjunkt sind,

$$\begin{aligned}
W_{s_1} &= \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma\big(\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G}\big)\Big)\\
&= \big(\mathrm{Obj}(I) \cap M\big)^{\kappa_G} \mathbin{\dot\cup} \big(\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G}\big)^{\kappa_G}\\
&= \big(\mathrm{Obj}(I) \cap M\big)^{\kappa_G} \mathbin{\dot\cup} (\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G \kappa_G}.
\end{aligned}$$

Demzufolge gilt $W_{s_2} \subseteq W_{s_1}$ und weiterhin:

$$s_2 \models \forall(\dot p \in W_{s_1} \cap G)\sigma[f] \text{ mit } f(\dot q) \in M \cap W_{s_2} \text{ und } f(\dot p) = \dot p.$$

Es ergeben sich damit die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
\sigma' \in \Big\{ \sigma[f] \;\Big|\; & O_G(I) \models \\
& \forall\Big(\dot p \in \mathrm{Obj}\big(\mathrm{Oracle}_\Gamma(\mathrm{Obj}(I) \cap M)\big) \cap G\Big)\sigma[f], f(\dot q) \in M, f(\dot p) = \dot p \Big\}
\end{aligned} \tag{3.51a}$$

genau dann, wenn

$$\sigma' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, q, 1\rangle\!\rangle \text{ und es gilt für alle } x \in W_{s_2} \cap G\text{: } x \;\kappa_G\; \mathbb{I}^I(q) \tag{3.51b}$$

genau dann, wenn

$$\sigma' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, q, 1\rangle\!\rangle \text{ mit } q \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((W_{s_2} \cap G)^{\kappa_G}\big) \text{ genau dann, wenn} \tag{3.51c}$$

$$\sigma' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, q, 1\rangle\!\rangle \text{ mit } q \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G \kappa_G}\big). \tag{3.51d}$$

Ist nun $\sigma'' \in I_1$ mit

$$\sigma'' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, r, 1\rangle\!\rangle \text{ und } r \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(\mathrm{Obj}(I_1) \cap M),$$

so folgt
$$r \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((\mathrm{Obj}(I_2) \cap M)^{\kappa_G \kappa_G}\big).$$
aufgrund der Hülleneigenschaften von ${}^{\kappa_G \kappa_G}$. Weiterhin folgt aus dem gleichen Grunde
$$\mathbb{I}^{I^{-1}}\big((\mathrm{Obj}(I_1) \cap M)^{\kappa_G \kappa_G}\big) \subseteq \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((\mathrm{Obj}(I_2) \cap M)^{\kappa_G \kappa_G}\big). \tag{3.52}$$

Ist nun $\sigma''' \in \varphi(I_1) \setminus I_1$, so folgt nach (3.51a) bis (3.51d):
$$\sigma''' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, r', 1 \rangle\!\rangle \text{ und } r' \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((\mathrm{Obj}(I_1) \cap M)^{\kappa_G \kappa_G}\big).$$

Aus denselben Gleichungen ergibt sich aber in Verbindung mit (3.52)
$$\sigma''' \in \varphi(I_2).$$

Also gilt auch $\varphi(I_1) \subseteq \varphi(I_2)$. □

Lemma 3.26. *Seien (A, B) und (C, D) zwei Begriffe zum Kontext $\mathbb{K}_G$ und φ und ψ entsprechend Lemma 3.25 definiert. Dann gelten die folgenden Gleichungen:*
$$(A, B) \sqcap (C, D) = \big(\mathbb{I}^I(T_G^A \sqcap_\varphi T_G^C), \mathbb{I}^I(T_M^B \sqcup T_M^D)\big), \tag{3.53a}$$
$$(A, B) \sqcup (C, D) = \big(\mathbb{I}^I(T_G^A \sqcup T_G^C), \mathbb{I}^I(T_M^B \sqcap_\psi T_M^D)\big). \tag{3.53b}$$

Beweis. Seien
$$\begin{aligned} T_G^A &=_d [\, \dot{p} \mid w \vDash I_A \,], \\ T_M^B &=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash I_B \,], \\ T_G^C &=_d [\, \dot{p} \mid w \vDash I_C \,] \text{ und} \\ T_M^D &=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash I_D \,]. \end{aligned}$$

Seien weiterhin $\sigma = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle$ und $\Gamma = \{\, \sigma \,\}$. Dann gilt:
$$\begin{aligned} T_M^B \sqcup T_M^D &=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash I_B \cap I_D \,] \\ &=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash \{\, \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, p, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \mid p : T_M^B \text{ und } p : T_M^D \,\} \,] \\ &=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash \{\, \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, p, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \mid p \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(A \cap C) \,\} \,]. \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^I(T_M^B \sqcup T_M^D) &= \{\, \mathbb{I}^I(q) \mid \text{ für alle } p \in {\mathbb{I}^I}^{-1}(A \cap C) \text{ gilt: } w \vDash \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, p, q, 1\rangle\!\rangle, q : T_M \,\} \\ &= \{\, x \in M \mid \text{ für alle } y \in (A \cap C) \text{ gilt: } y \;\kappa_G\; x \,\} \\ &= (A \cap C)^{\kappa_G}.\end{aligned}$$

Betrachten wir nun $\mathbb{I}^I(T_G^A \sqcap_\varphi T_G^C)$, dann gelten

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^I(T_G^A \sqcap_\varphi T_G^C) &= \mathbb{I}^I\big([\,\dot{p} \mid w \vDash \varphi(I_A \cup I_C)\,]\big) \\ &= \mathbb{I}^I\Bigg(\Big[\,\dot{p}\;\Big|\; w \vDash I_A \cup I_C \cup \Big\{\,\sigma[f]\;\Big|\; O_G(I_A \cup I_C) \vDash \\ &\qquad \forall\Big(\dot{p} \in \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma\big(\mathrm{Obj}(I_A \cup I_C) \cap M\big)\Big) \cap G\Big)\sigma[f], \\ &\qquad f(\dot{q}) \in M, f(\dot{p}) = \dot{p}\,\Big\}\,\Big]\Bigg) \\ &= \mathbb{I}^I\Bigg(\Big[\,\dot{p}\;\Big|\; w \vDash I_A \cup I_C \cup \Big\{\,\sigma[f]\;\Big|\; f(\dot{p}) = \dot{p}, \\ &\qquad f(\dot{q}) \in \big(\mathrm{Obj}(I_A \cup I_C) \cap M\big)^{\kappa_G\kappa_G}\,\Big\}\,\Big]\Bigg).\end{aligned}$$

Letzteres folgt aus (3.51a) bis (3.51d). Sei nun $\sigma' \in I_A$. Dann gilt laut Definition 3.15 (Seite 77): $\sigma' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, q, 1\rangle\!\rangle$ mit $q \in {\mathbb{I}^I}^{-1}(B)$. Damit ist $\mathrm{Obj}(I_A) = B$. Analog ist $\mathrm{Obj}(I_C) = D$. Damit folgt:

$$\mathrm{Obj}(I_A \cup I_C) = B \cup D \subseteq M.$$

Andererseits ergibt sich aus diesen Gleichungen

$$I_A \subseteq \Big\{\,\sigma[f]\;\Big|\; f(\dot{p}) = \dot{p}, f(\dot{q}) \in \big(\mathrm{Obj}(I_A \cup I_C) \cap M\big)^{\kappa_G\kappa_G}\,\Big\}.$$

Gleiches gilt auch für I_C. Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^I(T_G^A \sqcap_\varphi T_G^C) &= \mathbb{I}^I\Big(\big[\,\dot{p} \mid w \vDash \{\,\sigma[f] \mid f(\dot{p}) = \dot{p}, f(\dot{q}) \in (B \cup D)^{\kappa_G\kappa_G}\,\}\,\big]\Big) \\ &= \mathbb{I}^I\big(\{\, p \in {\mathbb{I}^I}^{-1}(G) \mid w \vDash \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, p, q, 1\rangle\!\rangle \text{ für alle} \\ &\qquad q \in {\mathbb{I}^I}^{-1}\big((B \cup D)^{\kappa_G\kappa_G}\big)\,\}\big) \\ &= \{\, g \in G \mid g \;\kappa_G\; m \text{ für alle } m \in (B \cup D)^{\kappa_G\kappa_G}\,\} \\ &= \big((B \cup D)^{\kappa_G\kappa_G}\big)^{\kappa_G} = (B \cup D)^{\kappa_G} \\ &= (A \cap C).\end{aligned}$$

Also gilt (3.53a).

Der Beweis für (3.53b) erfolgt analog. □

Lemma 3.27. *Seien*

$$M_1 := \{\, T \mid T\!:\!T_G \,\} \textit{ und} \tag{3.54a}$$
$$M_2 := \{\, T \mid T\!:\!T_M \,\}. \tag{3.54b}$$

die Mengen der Gegenstands- beziehungsweise Merkmalstypen der Signatur zum Kontext $\mathbb{K}_G$. Dann bilden die beiden Abbildungen

$$\alpha : M_1 \to M_2, \qquad \alpha(T) := T^{\kappa_G}, \tag{3.55a}$$
$$\beta : M_2 \to M_1, \qquad \beta(T) := T^{\kappa_G} \tag{3.55b}$$

eine GALOIS*verbindung bezüglich der Interpretationsuntertyp-Relation.*

Beweis. Sei zunächst $T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$ mit $\{\, T_1, T_2 \,\} \in M_1$. Dann gelten:

$$\begin{aligned}
\alpha(T_1) &=_d [\, \dot q \mid w \vDash \forall(\dot p \in \mathbb{I}^I(T_1))\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, \dot q, 1\rangle\!\rangle \,],\\
\alpha(T_2) &=_d [\, \dot q \mid w \vDash \forall(\dot p \in \mathbb{I}^I(T_2))\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, \dot q, 1\rangle\!\rangle \,]\\
&=_{\mathbb{I}} \big[\, \dot q \bigm| w \vDash \big(\forall(\dot p\!:\!T_1)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, \dot q, 1\rangle\!\rangle \wedge \forall\big(\dot p \in \mathbb{I}^I(T_2) \setminus \mathbb{I}^I(T_1)\big)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, \dot q, 1\rangle\!\rangle\big) \,\big],
\end{aligned}$$

also folgt aus $a\!:\!\alpha(T_2)$:

$$w \vDash \forall(\dot p\!:\!T_1)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, a, 1\rangle\!\rangle.$$

Diese Bedingung ist aber gleichbedeutend mit $a\!:\!\alpha(T_1)$. Damit folgt die Aussage $\alpha(T_2) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \alpha(T_1)$. Analog lässt sich die Antitonie für β zeigen.

Betrachten wir nun $a\!:\!T$ für $T \in M_1$. Dann gilt für jedes $b\!:\!\alpha(T)$ die Beziehung

$$w \vDash \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, a, b, 1\rangle\!\rangle.$$

Überträgt man dies analog auf β, so ist auch $a\!:\!\beta\big(\alpha(T)\big)$. Entsprechendes gilt auch hier für β.

Aus $T \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \beta\big(\alpha(T)\big)$ folgt aufgrund der Antitonie von α und β

$$\alpha\Big(\beta\big(\alpha(T)\big)\Big) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \alpha(T).$$

Ersetzt man andererseits $\alpha(T)$ durch den Typ $T' := \alpha(T)$, so ergibt sich

$$T' \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \alpha\big(\beta(T')\big),$$

also

$$\alpha(T) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \alpha\Big(\beta\big(\alpha(T)\big)\Big).$$

Der andere Fall folgt auch hier vollkommen analog. Demzufolge gilt die Aussage von Lemma 3.27 □

Folgerung 3.28. *Ersetzt man in Lemma 3.27 die Mengen M_1 und M_2 durch*

$$M_1 := \{\, T^{\kappa_G \kappa_G} \mid T : T_G \,\} \text{ und} \tag{3.56a}$$

$$M_2 := \{\, T^{\kappa_G \kappa_G} \mid T : T_M \,\}, \tag{3.56b}$$

so bilden α und β auch bezüglich $\sqsubseteq_d$ eine GALOIS*verbindung zwischen M_1 und M_2.*

Beweis. Es gilt für $\{\, T_1^{\kappa_G \kappa_G}, T_2^{\kappa_G \kappa_G} \,\} \subseteq M_1$ entsprechend Lemma 3.23:

$$T_1^{\kappa_G \kappa_G} \sqsubseteq_d T_2^{\kappa_G \kappa_G} \text{ genau dann, wenn } T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2.$$

Damit lässt sich nun der Beweis für Lemma 3.27 auch hierher übertragen, wie dies am Beispiel der folgenden Bedingung geschieht.

Aus $T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$ folgt weiterhin $\alpha(T_2) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \alpha(T_1)$ nach Lemma 3.27. In Verbindung mit (3.44) ergibt sich:

$$\text{aus } T_1^{\kappa_G \kappa_G} \sqsubseteq_d T_2^{\kappa_G \kappa_G} \text{ folgt } \alpha(T_1^{\kappa_G \kappa_G}) \sqsupseteq_d \alpha(T_2^{\kappa_G \kappa_G}).$$

Analog lassen sich auch alle anderen Bedingungen beweisen. □

Lemma 3.29. *Seien $T_1 : T_G$ und $T_2 : T_M$ zwei Typen zur Signatur zum Kontext $\mathbb{K}_G$. Dann gelten*

$$\big(\mathbb{I}^I(T_1^{\kappa_G \kappa_G}), \mathbb{I}^I(T_1^{\kappa_G})\big) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \tag{3.57a}$$

$$\big(\mathbb{I}^I(T_2^{\kappa_G}), \mathbb{I}^I(T_2^{\kappa_G \kappa_G})\big) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \tag{3.57b}$$

Beweis. Entsprechend Lemma 3.17 gelten:

$$\big(\mathbb{I}^I(T_1^{\kappa_G \kappa_G}), \mathbb{I}^I(T_1^{\kappa_G})\big) = \Big(\big(\mathbb{I}^I(T_1)\big)^{\kappa_G \kappa_G}, \big(\mathbb{I}^I(T_1)^{\kappa_G}\big)\Big),$$

$$\big(\mathbb{I}^I(T_2^{\kappa_G}), \mathbb{I}^I(T_2^{\kappa_G \kappa_G})\big) = \Big(\big(\mathbb{I}^I(T_2)\big)^{\kappa_G}, \big(\mathbb{I}^I(T_2)^{\kappa_G \kappa_G}\big)\Big).$$

Damit wurde die Behauptung gezeigt. □

Satz 3.30. *Seien* $\mathbb{K}_G$ *ein Kontext,* $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ *die erweiterte Welt dazu und* Σ *die Signatur zum Kontext* $\mathbb{K}_G$*. Dann bilden die halbgeordneten Mengen*

$$\mathfrak{B}_1 = (\{\, T^{\kappa_G \kappa_G} \mid T : T_G \,\}, \sqsubseteq_d), \tag{3.58a}$$

$$\mathfrak{B}_2 = (\{\, T^{\kappa_G \kappa_G} \mid T : T_M \,\}, \sqsubseteq_d) \tag{3.58b}$$

mit Hilfe der Halbordnung $\sqsubseteq_d$ *vollständige Verbände, die isomorph zum Begriffsverband* $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$ *sind.*

Dies gilt auch für

$$\mathfrak{B}_3 = (\{\, (T_1, T_2) \mid T_1 : T_G, T_2 : T_M, T_1 =_{\mathbb{I}} T_2^{\kappa_G}, T_2 =_{\mathbb{I}} T_1^{\kappa_G} \,\}, \sqsubseteq_{\mathbb{I}}) \tag{3.59}$$

mit

$$(T_1, T_2) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} (T_3, T_4) \text{ genau dann, wenn } T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_3 \text{ genau dann, wenn } T_4 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2. \tag{3.60}$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_3$ isomorph bezüglich ihrer Halbordnung sind. Dies ist aber offensichtlich, da zu jedem Paar $(T_1, T_2) \in \mathfrak{B}_3$ die Bedingungen $T_1^{\kappa_G \kappa_G} \in \mathfrak{B}_1$ und $T_2^{\kappa_G \kappa_G} \in \mathfrak{B}_2$ gelten. Andererseits gelten $T_1^{\kappa_G \kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_1$ und $T_2^{\kappa_G \kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_2$. Dies ergibt sich aus (3.59) durch Einsetzen in den jeweils anderen Typ. Andersherum kann man einen beliebigen Typ aus $\mathfrak{B}_1$ oder $\mathfrak{B}_2$ nehmen und nach (3.59) das „Gegenstück“ dazu konstruieren. Weiterhin ist diese Beziehung zwischen den Mengen mit der Halbordnung verträglich. Dies folgt aus den Lemmata 3.23 und 3.27, den Folgerungen 3.22 und 3.28 und (3.60). Durch die direkte Entsprechung der Typen sind die Beziehungen zwischen den drei Mengen sogar verträglich mit der Supremums- und Infimums-Bildung (Lemma 3.23).

Betrachten wir nun die Abbildung

$$\alpha(A, B) := (T_G^A, T_M^B).$$

Dann gilt $\alpha : \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \to \mathfrak{B}_3$ nach Folgerung 3.18. Ebenso existiert nach Lemma 3.29 eine Abbildung

$$\alpha^{-1} : \mathfrak{B}_3 \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$$

mit

$$\alpha^{-1}(T_1, T_2) := \big(\mathbb{I}^I(T_1), \mathbb{I}^I(T_2)\big).$$

Nach Folgerung 3.16 gilt

$$\alpha^{-1}(\alpha(A, B)) = (A, B).$$

Damit ist α injektiv. Andererseits existiert zu jedem Paar $(T_1, T_2) \in \mathfrak{B}_3$ ein Begriff $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$, so dass $\alpha^{-1}(T_1, T_2) = (A, B)$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha(A, B) &=_d ([\dot{p} \mid w \models \forall(\dot{q} \in B)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle], [\dot{q} \mid w \models \forall(\dot{p} \in A)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle]) \\
&=_d \big(\big[\dot{p} \bigm| w \models \forall\big(\dot{q} \in \mathbb{I}^I(T_2)\big)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle\big], \\
&\qquad\qquad \big[\dot{q} \bigm| w \models \forall\big(\dot{p} \in \mathbb{I}^I(T_1)\big)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle\big]\big) \\
&=_d (T_2^{\kappa_G}, T_1^{\kappa_G}) =_{\mathbb{I}} (T_1, T_2).
\end{aligned}$$

Damit folgt die Surjektivität und damit auch die Bijektivität von α.

Kommen wir nun zur Monotonie von α beziehungsweise von α^{-1}. Angenommen es gelte (3.60) für vier Typen T_1 bis T_4. Dann gilt $T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_3$ genau dann, wenn $\mathbb{I}^I(T_1) \subseteq \mathbb{I}^I(T_3)$. Dual dazu gilt $\mathbb{I}^I(T_4) \subseteq \mathbb{I}^I(T_2)$ genau dann, wenn $T_4 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$. Damit gilt aber $\alpha^{-1}(T_1, T_2) \sqsubseteq \alpha^{-1}(T_3, T_4)$ genau dann, wenn $(T_1, T_2) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} (T_3, T_4)$. Damit gilt die Monotonie. Mit Lemma 3.26 gilt nun auch die Verträglichkeit mit Supremums-Bildung und Infimumsbildung, da ja schon mit Lemma 3.23 gezeigt wurde, dass beide Typ-Halbordnungen auf den drei hier betrachteten Mengen äquivalent sind. □

Bemerkung 3.31. Die Verbände aus (3.58a) und (3.58b) eignen sich zum Beispiel, um mit einer Welt formale Begriffsanalyse zu betreiben, die entsprechend Beispiel 3.4 definiert ist. Im Gegensatz zur Mengenlehre wird hier im Typ selbst auch der jeweils andere Aspekt (Gegenstände beziehungsweise Merkmale) kodiert.

Mit Satz 3.30 wurde gezeigt, dass sich der Begriffsverband zu einem Kontext bis auf Isomorphie auch mit ähnlichen Methoden bilden lässt, wie es auch in der formalen Begriffsanalyse üblich ist. Diesen Begriffsverband kann man verwenden, um Methoden, wie die Reduktion von Kontexten, zu definieren und anzuwenden.

Wenn auch die Verbandstheorie einen handlicheren Formalismus zur Beschreibung der formalen Begriffsanalyse liefert, so besitzt dennoch auch die Situationstheorie die Mächtigkeit, Probleme der formalen Begriffsanalyse zu betrachten.

Schlusswort

Die in dieser Arbeit vorgestellte Theorie basiert vollständig auf Prinzipien der klassischen Mengentheorie und Algebra. Sie stellt damit nur einen kleinen Teil dessen dar, womit sich die Situationstheorie beschäftigt. Dennoch konnte gezeigt werden, dass sich dieser Teil dafür eignet, bekannte Strukturen wie die Begriffsverbände nachzubilden. Damit wird es nun möglich, weitere Begriffe und Methoden der formalen Begriffsanalyse zu übertragen und mit Hilfe des hier angeführten Formalismus zu beschreiben. Beispielsweise lassen sich Teilkontexte als Situationen und Implikationen als Bindungen auffassen.

Zum einen gehört zu einer umfassenden Theorie über die Information – wie sie die Situationstheorie sein will – nicht nur eine Beschreibungsmöglichkeit dieser, sondern auch Heuristiken und Algorithmen zum Umgang damit. Dies hat die Situationstheoretiker bewogen, sich auch mit Mechanismen des Erkennens und Verarbeitens von Informationen zu beschäftigen. So beschreibt beispielsweise KEITH DEVLIN in (Devlin 1993) auch Geisteszustände wie Wissen, Glauben und Wünschen.

Zum anderen versucht die Situationstheorie, ihre Darstellungsmöglichkeiten so weit wie möglich denen der natürlichen Sprachen anzunähern und dabei die Grenzen der klassischen Prädikatenlogik zu sprengen. Beispielsweise spricht JON BARWISE in (Barwise 1989, Kapitel 14) von der Situiertheit der klassischen Mengenlehre.

Ein Universum der klassischen Mengenlehre sei immer Bestandteil eines anderen Universums, während Mengen eines höheren Universums aus Sicht des untergeordneten unter Umständen nur noch als Klassen wahrnehmbar seien. Devlin spricht gar von einer Mengenlehre ohne Fundierungsaxiom (Siehe (Devlin 1993, Seite 166, Fußnote 7) und (Barwise 1989, Kapitel 8)). Um dem Problem der Paradoxa zu begegnen benutzt er jedoch eine Abstufung im Bereich der Situationen und der Welt, ähnlich wie es die klassische Prädikatenlogik höherer Stufe mit Ebenen der Relationen tut.

Dies sind nur zwei Beispiele. Es gibt durchaus noch weitere Möglichkeiten, Situationstheorien zu beschreiben. Jon Barwise beschreibt in (Barwise 1989, Kapitel 11) etwa zwanzig Verzweigungspunkte, die verschiedene Eigenschaften fordern oder zulassen. Welche davon wirklich nutzbringend sind, wird die Zukunft zeigen. Nichtsdestotrotz existieren schon verschiedene Versuche, die Situationstheorie praktisch oder theoretisch anzuwenden, wie zum Beispiel (Restall 1996) und (Huibers u. a. 1996) belegen.

Literaturverzeichnis

Barwise 1989 Barwise, Jon: *CSLI Lecture Notes.* Bd. 17: *The Situation in Logic.* Center for the Study of Language and Information Publications, 1989. – ISBN 0-937073-33-4, ISBN 0-937073-32-6

Birkhoff 1940 Birkhoff, Garret: *Colloquium publications.* Bd. 25: *Lattice theory.* American Mathematical Society, 1940

Devlin 1993 Devlin, Keith: *Infos und Infone: die mathematische Struktur der Information.* 1. Auflage. Boston, Berlin : Birkhäuser, 1993. – ISBN 3-7643-2703-0

Dretske 1981 Dretske, F.: *Knowledge and the Flow of Information.* MIT Press, 1981 (Bradford Books)

Ganter und Wille 1996 Ganter, Bernhard ; Wille, Rudolf: *Formale Begriffsanalyse : Mathematische Grundlagen.* Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1996. – ISBN 3-540-60868-0

Hebisch 1991 Hebisch, Udo: Eine Verbandstheoretische Präzisierung des Informationsbegriffes / Technische Universität Clausthal. Technische Universität Clausthal, Institut für Mathematik, Erzstraße 1, 3392 Clausthal-Zellerfeld, Oktober 1991 (Mathematik-Bericht 91/2). – Forschungsbericht

Huibers u. a. 1996 Huibers, Th. W. C. ; Lalmas, Mounia ; Rijsbergen, C. J. van: Information Retrieval and Situation Theory. In: *SIGIR Forum* 30 (1996), Nr. 1, S. 11–25. – URL `http://citeseer.nj.nec.com/huibers96information.html` . – Zugriffsdatum: 02. 07. 2003

Kunath 2001 Kunath, Andreas: *Implikation und Information*, TU Bergakademie Freiberg, Diplomarbeit, Mai 2001

Perry 1999? Perry, John: *Semantics, Situation.* Kap. U041. In: *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Routledge, 1999?. – URL `http://www.rep.routledge.com/` . – Zugriffsdatum: 19. Juni 2003. – Artikel-URL:
`http://www-csli.stanford.edu/~john/PHILPAPERS/sitsem.pdf`

Restall 1996 Restall, Greg: Notes on Situation Theory and Channel Theory / Macquarie University Sydney. Department of Philosophy, School of History, Philosophy and politics, Macqarie University Sydney NSW 2109, 16. Juni 1996. – Forschungsbericht. – URL `http://consequently.org/papers/channels.pdf` . – Zugriffsdatum: 19. Juni 2003

Scott 1982 Scott, Dana S.: Domains for denotational semantics. In: *Lecture Notes Computer Science* (1982), Nr. 140, S. 577–613

Sonntag 1998 Sonntag, Martin: *Formale Begriffsanalyse*. Lehrskript. 1998. – URL `http://www.mathe.tu-freiberg.de/~sonntag/skripte.html` . – Zugriffsdatum: 15. Januar 2003

Zalta 1993 Zalta, Edward N.: Twenty-Five Basic Theorems in Situation and World Theory. In: *Journal of Philosophical Logic* Bd. 22, URL `http://mally.stanford.edu/abstracts/twenty-five.html` . – Zugriffsdatum: 31. März 2003, 1993, S. 385–428. – Preprint-Version

Копытов 1984 Копытов, Валерий Матвеевич: *Решеточно упорядоченные группы*. Москва : Наука, 1984 (Современная Алгебра)

Index

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Freiberg, 17. April 2004

Tobias Schlemmer

Erklärung

Hiermit erkläre ich mich mit der öffentlichen Aufstellung der vorliegenden Diplomarbeit in Bibliotheken einverstanden.

Freiberg, 17. April 2004

Betreuer	Kandidat