Technische Universität Bergakademie Freiberg

Министерство образования Российсской Федерации
Московский государственный геологоразведочный университет

Дипломная работа
перевод автора

Алгебраическое изучение понятия информации K. DEVLINа

Tobias Schlemmer

17 апреля 2004 г.

TU Bergakademie Freiberg
Fakultät für Mathematik und Informatik
Для получения академического градуса: диплом-математик

Министерство образования Российсской Федерации
Московский государственный геологоразведочный университет
Геофизический факультет
Кафедра высшей математики и математического моделирования

Научные руководителя:

Prof. Dr. rer. nat. Udo Hebisch (TUBAF)и
Проф. Юрий Анатольевич Фарков (МГГРУ)

Дата передачи темой: 18 сентября 2003 г.
Срок сдачи работы: 18 марта 2004 г.

Сдано в: 9 марта 2004 г. (нем.), 6 апреля 2004 г. (рус. перевод)

Защита будет вероятно в июне 2004 в Москве.

Данная версия отчищена еще раз от опечаток и обработана для двухстраничной печати с корректурой для переплетания 0,5 cm.

Tobias Schlemmer
keinstein_junior@gmx.net
http://www.stunet.tu-freiberg.de/~schlemmer/

Писанно с помощью LaTeX 2$_\varepsilon$при использования класса документа tsdiplom.

Оглавление

Список иллюстраций

Список таблиц

Список символов

$(M, \leq)$	частично или линейно упорядоченное множество; решетка, страница 15
$\mathbb{K}$; (G, M, κ)	контекст, страница 18
$\gamma\, g$	предметное понятие предмета g, страница 19
$\mu\, m$	призначное понятие признака m, страница 19
$\mathbb{S}_m$	шкала признака m, страница 20
$m(g)$	выражение признака m предмета g, страница 20
w_x^e	свойственная функция, страница 24
$(e, x, w_x^e(t), t)$	свойство объекта x в t, страница 24
$w_x(t)$	линия мира объекта x, страница 24
$w = (W, F)$	мир, страница 24
$s = (W_s, F_s)$	ситуация, страница 25
R	отношение, страница 33
$\Sigma = (\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$	сигнатура, страница 33
$a, \dot{a}$	объект, параметр, страница 33
IND, TIM, LOC	тип индивидуумов, временных и пространственных локализаций, страница 35
$\mathbb{I}^I$, $\mathbb{I}^R$, $\mathbb{I}^T$	интерпретация индивидуумов, отношений, туплетов, страница 38
$\mathbb{I}$; $(\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$	интерпретация, страница 39
$C = [\, S_1 \Longrightarrow S_2 \,]$	связь, страница 68
T_G^A, T_M^B	тип содержания, объема понятии A, B, страница 84
$\mathfrak{B}(G, M, \kappa)$	решетка понятий к контексту (G, M, κ), страница 19
D_G	множество данных типа G, страница 33
D_e	множество значения свойства e, страница 24
T	множество точек времени мира, страница 24
V_G	множество параметров типа G, страница 33
$\mathfrak{G}$	множество основных типов, страница 33
$\mathfrak{I}_{\mathrm{co}}$	множество всех когерентных абстрактных ситуаций, страница 57

$\mathfrak{R}$	множество отношений, страница 33
$\mathfrak{T}(\Sigma)$	множество всех типов сигнатуры Σ, страница 33
$\mathfrak{S}$	множество ситуаций мира w, страница 25
$\phi \circ \psi$	связь двух отображений: $\phi \circ \psi(x) := \phi\big(\psi(x)\big)$
$\mathfrak{P}(M)$	множество всех подмножеств множества M: $\mathfrak{P}(M) := \{\, A \mid A \subseteq M \,\}$
$M_1 \dot\cup M_2$	разобщенное соединение множества M_1 и M_2
$(M)^\complement$	дополнение множества M
$a \vee b$	объединение элементов a и b, страница 16
$a \wedge b$	пересечение элементов a и b, страница 16
$\sup T$	точная верхняя грань множества T, страница 16
$\inf T$	точная нижняя грань множества T, страница 16
$\bigsqcup M$	объединение понятий из M, страница 19
$\bigsqcap M$	пересечение понятий из M, страница 19
$s_1 \cup s_2$, $s_1 \cap s_2$	пересечение и объединение ситуаций s_1 и s_2, страница 29
X^κ	производный оператор инцидентного отношения κ, страница 18
$s(I)$	ситуация к множеству I, страница 63
$\mathrm{Obj}(s)$	множество объектов ситуации s, страница 25
$\mathrm{Obj}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle)$	множество объектов содержания информации $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$, страница 41
$\mathrm{Act}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle)$	множество активных объектов содержания информации $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$, страница 42
$[\, \dot{x} \mid s \models I \,]$	тип объекта, страница 60
$[\, \dot{s} \mid \dot{s} \models I \,]$	тип ситуаций, страница 61
$\dot{q} \restriction C$, $\dot{q} \restriction \sigma$	стесненный параметр, страница 62
$\sigma[f]$, $I[f]$	якорь для σ или I, страница 60
$w(\mathbb{K})$	мир контекста $\mathbb{K}$, страница 72
$\mathbb{K}_t(w)$	контекст мира w в точке времени t, страница 71
$\breve{w}(\mathbb{K}_G)$	расширенный мир контекста $\mathbb{K}_G$, страница 82
$T_1 \sqcup T_2$, $T_2 \sqcap_\varphi T_2$	объединение, пересечение относительно $\sqsubseteq_d$, страница 86
$a \leq b$	a меньше или равно b, страница 15
$(A, B) \sqsubseteq (C, D)$	(A, B) — подпонятие понятия (C, D), страница 19
$s_1 \subseteq s_2$	s_1 — подситуация ситуации s_2, страница 26
$s \models \langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$	s поддерживает $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$, страница 42
$\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle$	эквивалентность содержания информаций,

	страница 44
$T_1 : T_2$, $T_1 \overset{:}{=} T_2$	T_1 является частичным типом типа, или синтаксически равным типу T_2, страница 33
$T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$, $T_1 =_{\mathbb{I}} T_2$	T_1 интерпретативный подтип, равно интерпретированный типу T_2, страница 62
$x : T$, $\dot{p} : T$	x и $\dot{p}$ от типа $x : T$, страница 33
$T_1 \sqsubseteq_d T_2$	T_1 является подтипом типа T_2, страница 86

Введение

Несмотря на то, что мы хорошо знаем и используем информацию, не существует пока еще общепринятой, признанной теории информации, которая включает все ее виды. Разные авторы пробовали приблизиться к этой теме со стороны философии, физики, статистики, логики и алгебры. Keith Devlin в своей книге „Infos und Infone“ (Devlin 1991, 1993) использует больше логический подход — теория ситуаций. Цель этой теории — подобрать инструмент, при помощи которого можно было бы исследовать потоки информаций, и который имел бы при этом как можно меньше ограничений по логике. Поэтому, вместо описания формального механизма дедукции, изучаются механизмы разработки информаций. При этом данную книгу в большей степени можно считать описанием методики проведения устройства новой математической теории, чем традиционным учебником по математике. Цель этой работы — алгебраически сформулировать структуры используемые в этой книге и расположить их в теорию решеток.

Для того в главе 1 введены необходимые понятия теории решеток, с последующим развитием в главе 2 устроится формализм теории ситуаций. Вместе с тем пытаемся преобразовать понятия, приведенные в книге (Devlin 1993). Но иногда необходимо дать новое определение разным понятиям. К примеру, Keith Devlin исходит от нашего естественного мира, хотя здесь надо алгебраическое определение. А при этом существуют еще и дополнительные ограничения. Несмотря на то, что используемые в работе понятия имеют внешнюю структуру Keithа Devlinа, необходимо было ввести новые внутренние определения. Наконец, в главе 3 показано, что при помощи этого возможно представить главные понятии формального анализа понятий (понятия и решетка понятий).

1 Основы теории решеток

В этой главе вводятся понятия теории решеток, которые необходимы для понимания данной работы. Для дальнейшего углубления есть ссылки на литературу в соответствующем месте.

1.1 Частично упорядоченные множества и решетки

Примеры и дальнейшее объяснение частично упорядоченных множеств и решеток можно найти в обычной литературе по теории решеток, как например (Birkhoff 1940) или в многих, на них настроенных, более специальных работах, как (Копытов 1984).

Определение 1.1. Пусть M множество и $\leq \subseteq M \times M$ бинарное соотношение. Тогда $\leq$ является *частичным порядком* и $(M, \leq)$ *частично упорядоченным множеством*, если для любых элементов a, b и c из M удовлетворены следующие условия:

Рефлексивность: $a \leq a$.

Антисимметричность: Если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.

Транзитивность: Из $a \leq b$ и $b \leq c$ следует $a \leq c$.

Если дополнительно для всех $a \in M$ и $b \in M$ верно

$$a \leq b \text{ или } b \leq a, \tag{1.1}$$

то $(M, \leq)$ называется *линейно упорядоченным множеством* и соответственно $\leq$ *линейным порядком*. ♢

Определение 1.2. Пусть $(M, \leq)$ частично упорядоченное множество. Элемент $a \in M$ называется *наименьшим элементом* частичного порядка $\leq$, если для всех $b \in M$ удовлетворяется неравенство

$$a \leq b. \tag{1.2}$$

Аналогично c называют *наибольшим элементом*, если для всех $b \in M$ верно

$$b \leq c. \tag{1.3}$$

$\Diamond$

Определение 1.3. Пусть $(M, \leq)$ частично упорядоченное множество. Если для множества $T \subseteq M$ множество

$$\{\, x \in M \mid \forall a \in T : a \leq x \,\} \tag{1.4}$$

имеет наименьший элемент, то он называется *точной верхней гранью* или *объединением* множества T $(c = \sup T)$:

$$c = \sup T = \bigvee T. \tag{1.5}$$

Если T состоит только из двух элементов a и b, то этот оператор можно написать в форме:

$$c = a \vee b \tag{1.6}$$

Аналогично наибольший элемент c множества

$$\{\, x \in M \mid \forall a \in T : x \leq a \,\} \tag{1.7}$$

называется в случае его существования *точной нижней гранью* или *пересечением* множества T:

$$c = \inf T = \bigwedge T. \tag{1.8}$$

Для двух элементов a и b имеет место

$$c = a \wedge b. \tag{1.9}$$

$\Diamond$

Определение 1.4. Частично упорядоченное множество $(M, \leq)$ является *верхней полурешеткой* (*нижней полурешеткой*), если для любых двух элементов $a \in M$ и $b \in M$ существует точная верхняя грань $a \vee b$ (точная нижняя грань $a \wedge b$). Если множество $(M, \leq)$ является и верхней и нижней полурешеткой, то оно называется *решеткой*

Решетка $(M, \leq)$ называется *полной решеткой*, если для любого подмножества $T \subseteq M$ существуют пересечение $\inf T$ и объединение $\sup T$. $\Diamond$

Определение 1.5. Пусть $(M, \leq)$ — полная решетка. Множество $N \subseteq M$ называется *плотным относительно объединения* ($\vee$-плотным) во множестве M, если каждый элемент множества M можно описать, как объединение подмножества множества N. Аналогично N называется *плотным относительно пересечения* ($\wedge$-плотным), если для всех $x \in M$ выполнено уравнение

$$x = \inf\{\, y \in N \mid x \leq y \,\}. \tag{1.10}$$

$\diamondsuit$

Определение 1.6. Пусть $(M, \leq)$ — частично упорядоченное множество. Автоморфизм f на M называется *изотонным*, если

$$\text{из } x \leq y \text{ следует } f(x) \leq f(y), \tag{1.11}$$

экстенсивным, если

$$x \leq f(x) \tag{1.12}$$

и *идемпотентным*, если

$$f(f(x)) = f(x) \tag{1.13}$$

для всех x, $y \in M$.

Экстенсивный, изотонный и идемпотентный автоморфизм на M называется *функцией замыкания множества M*. $\diamondsuit$

Вывод 1.7. *Автоморфизм $f : M \to M$ частично упорядоченного множества $(M, \leq)$ является функцией замыкания тогда и только тогда, когда все $x \in M$ и все $y \in M$ удовлетворяют уравнению*

$$x \leq f(y) \text{ тогда и только тогда, когда } f(x) \leq f(y). \tag{1.14}$$

$\square$

Пример 1.8. Пусть $(M, \leq)$ — полная решетка и $N \subseteq M$. Если отображение $f : M \to M$ определяется формулой $f(x) = \inf\{\, y \in N \mid x \leq y \,\}$, то f является функцией замыкания множества M.

Пример 1.9. Также очевидно, что идентичность $Id : x \mapsto x$ является функцией замыкания любого частично упорядоченного множества.

1.2 Структуры информаций и решетки понятий

Определение 1.10. Если частично упорядоченное множество $(I, \leq)$ удовлетворяет следующие условия:

1. Существует наименьший элемент $0 \in I$ — *пустая информация*.
2. Для $x, y \in I$ всегда существует пересечение $x \wedge y \in I$.
3. Для $x, y, u \in I$ при $x \leq u$ и $y \leq u$ существует объединение $x \vee y \in I$,

то она называется *структурой информаций*. $\diamondsuit$

Пример 1.11. Видно, что каждая решетка с наименьшим элементом является структурой информации. Следовательно, каждая полная решетка тоже — структура информации.

Решетка понятий (англ. concept lattice) — очень мощный инструмент для изучения объектов и их свойств. С 1982 года, после того как R. Wille опубликовал первую статью, появилось много работ на эту тему. Это доказывает, например, список литературы в (Ganter и Wille 1996), где подробно описаны математические основы формального анализа понятий. В этой книге также можно найти доказательства следующих теорем и следствий.

Определение 1.12. *Контекст* $\mathbb{K} = (G, M, \kappa)$ состоит из

1. одного множества G *предметов* или *объектов*,
2. одного множества M *признаков* или *атрибутов* и
3. одного *инцидентного отношения* $\kappa \subseteq G \times M$. Здесь значит $g \; \kappa \; m$ для $g \in G$ и $m \in M$, что предмет g имеет свойство m.

Для каждого контекста существуют следующие *производные операторы*:

$$X^\kappa = \{\, m \in M \mid g \; \kappa \; m \text{ для всех } g \in X \,\} \quad (X \subseteq G) \text{ и} \tag{1.15}$$

$$Y^\kappa = \{\, g \in G \mid g \; \kappa \; m \text{ для всех } m \in Y \,\} \quad (Y \subseteq M). \tag{1.16}$$

Под *понятием* контекста (G, M, κ) мы понимаем пару (A, B) с $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $A^\kappa = B$ и $B^\kappa = A$. При этом A называется *объемом*, а B — *содержанием* понятия (A, B).

Если (A_1, B_1) и (A_2, B_2) — понятия одного и того же контекста, то (A_1, B_1) называется *подпонятием* понятия (A_2, B_2) и (A_2, B_2) — *родовым понятием* понятия (A_1, B_1), если верно $A_1 \subseteq A_2$, что равноценно условию $B_1 \supseteq B_2$ (см. теорему 1.13). Тогда пишут

$$(A_1, B_1) \sqsubseteq (A_2, B_2). \tag{1.17}$$

$\Diamond$

Теорема 1.13. *Производные операторы* $^\kappa$ *составляют* соответствие GALOIS *между множествами подмножеств* $\mathfrak{P}(G)$ *и* $\mathfrak{P}(M)$. *Это значит, что они удовлетворяют отношению*

$$T_1 \subseteq T_2 \text{ включает в себя } T_1^\kappa \supseteq T_2^\kappa, \tag{1.18}$$

$$T \subseteq T^{\kappa\kappa} \text{ и } T^\kappa = T^{\kappa\kappa\kappa} \tag{1.19}$$

для всех T *и всех* T_j *из* $\mathfrak{P}(G)$ *или* $\mathfrak{P}(M)$. *Кроме того имеем*

$$\Big(\bigcup T_j\Big)^\kappa = \bigcap T_j^\kappa \text{ и} \tag{1.20}$$

$$\Big(\bigcap T_j\Big)^\kappa \supseteq \bigcup T_j^\kappa \tag{1.21}$$

для всех T_j *из* $\mathfrak{P}(G)$ *или* $\mathfrak{P}(M)$.

Теорема 1.14 (Основная теорема формального анализа понятий). *Множество* $\mathfrak{B}(G, M, \kappa)$ *всех понятий контекста* (G, M, κ) *формирует относительно соотношения* $\sqsubseteq$ *полную решетку, которая называется* решеткой понятий *контекста* (G, M, κ). *Для пересечения и объединения любого семейства* $(A_j, B_j)_{j \in J}$ *понятий верно:*

$$\bigsqcap_{j \in J} (A_j, B_j) = \Big(\bigcap_{j \in J} A_j, \Big(\bigcup_{j \in J} B_j\Big)^{\kappa\kappa}\Big), \tag{1.22}$$

$$\bigsqcup_{j \in J} (A_j, B_j) = \Big(\Big(\bigcup_{j \in J} A_j\Big)^{\kappa\kappa}, \bigcap_{j \in J} B_j\Big). \tag{1.23}$$

Если наоборот $(V, \leq)$ — *полная решетка, то верно* $V \cong \mathfrak{B}(G, M, \kappa)$ *тогда и только тогда, когда существуют отображения* $\gamma : G \to V$ *и* $\mu : M \to V$ *так, что* $\gamma(G)$ *плотно относительно объединения и* $\mu(M)$ *плотно относительно пересечения и верно:* $g \ \kappa \ m$ *тогда и только тогда, если* $\gamma g \leq \mu m$ *для всех* $g \in G$ *и* $m \in M$. *В частности, всегда имеет место*

$$V \cong \mathfrak{B}(V, V, \leq). \tag{1.24}$$

Вывод 1.15. *Функции*

$$\gamma : G \to \mathfrak{B}(G, M, \kappa) \text{ и} \tag{1.25}$$

$$\mu : M \to \mathfrak{B}(G, M, \kappa), \tag{1.26}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\gamma\, g := (g^{\kappa\kappa}, g^{\kappa}) \text{ и} \tag{1.27}$$

$$\mu\, m := (m^{\kappa}, m^{\kappa\kappa}), \tag{1.28}$$

выполняют условия теоремы 1.14 для $V = \mathfrak{B}(G, M, \kappa)$.

Определение 1.16. *Многозначный контекст* (G, M, W, κ) состоит из трех множеств G, M и W и трехзначного соотношения κ между G, M и W (это значит: $\kappa \subseteq G \times M \times W$), причем верно

$$\text{из } (g, m, w) \in \kappa \text{ и } (g, m, v) \in \kappa \text{ всегда следует } w = v. \tag{1.29}$$

Элементы множества G мы назовем *предметами*, элементы множества M — *признаками* и те множества W — *выражениями признаков* или *значениями*. $\Diamond$

Замечание 1.17. Условие (1.29) рекомендует рассматривать многозначные признаки как частичные отображения из G в W. При этом мы можем определить:

$$m(g) := w \text{ тогда и только тогда, когда } (g, m, w) \in \kappa. \tag{1.30}$$

Определение 1.18. *Шкала* признака m многозначного контекста является (единозначным) контекстом $\mathbb{S}_m := (G_m, M_m, \kappa_m)$ при условии $m(G) \subseteq G_m$. Предмет шкалы называется *значением шкалы* и признак *признаком шкалы*. $\Diamond$

Определение 1.19. Если (G, M, W, κ) — многозначный контекст и $\mathbb{S}_m$ — шкалы для всех $m \in M$, то по формулам

$$M' := \dot{\bigcup_{m \in M}} M_m \tag{1.31}$$

и

$$g\, \kappa'\, (m, n) \text{ тогда и только тогда, когда } m(g) = w \text{ и } w\, \kappa_m\, n \tag{1.32}$$

определяется *производный контекст* (G, M', κ') относительно *простой шкализации*. $\Diamond$

Пример 1.20. Самым простым примером шкалы признака m с множеством значения W_m является так названная *номинальная шкала*

$$\mathbb{N}_n := (W_m, W_m, \{\,(w,w) \mid w \in W_m\,\}) \tag{1.33}$$

с условием $n = |W_m|$. Она раскладывает свойство в его значения.

2 Теория ситуаций

„Докладчики обычно говорят об определенной части мира. Это действительно один из главных мотивов теории ситуаций“

Так описывает Keith Devlin (Devlin 1993, стр. 306) важную сферу передачи информации — разговор, как основу теории информации. Его особая цель — устроить инструмент, с помощью которого можно изучить потоки информации. Для этого он исходит от тезиса, что информация пропозициональна, то есть всегда есть информация о чем-нибудь (типично о части мира — о ситуации).

Похоже иными подходами (смотри также Hebisch 1991), здесь информации считаются элементами больших структурированных множеств, так называемых абстрактных ситуаций. Эти множества могут получить свои информации из реальных ситуаций нашего мира, даже если невозможно описать их полностью. Структура задана реальностью.

Так называемые *когнитивные актеры* принимают эти информации, сохраняют их или обрабатывают их и реагируют на них. Рядом с *индивидуацией* (то есть узнаванием, дигитализацией) существует возможность *дискриминации*, реагирования на обстоятельства, без прямой обработки информации. При этом каждый актер обычно только может индивидуировать конечное число информации. Этот вид на мир называется *схемой индивидуации*.

С другой стороны, для теоретического рассмотрения часто интересны дополнительные информации об обстоятельствах. В зависимости от стороны, с которой смотрят на мир, используют *схему актера* или *теоретика*, как схему индивидуации.

Существуют разные направления теории ситуаций с отличающимися системами аксиом (смотри Barwise 1989). Здесь нам служит предложение Keithа Devlinа основой. Примеры иных теорий и применений можно найти у Zalta (смотри Zalta 1993), Restall (смотри Restall 1996) и Huibers (смотри Huibers и др. 1996).

2.1 Мир и ситуации

Чтобы установить, чем занимается теория ситуации, определим здесь мир как „лужайку для игр“, где потом ситуации могут „развиться“. При этом будем использовать идею из теории относительности — линию мира. В этой теории линия мира обозначает целый путь объекта в пространстве и во времени. Мы обобщим это понятие, включая в линию мира не только положение, но и также все свойства объекта. Для простоты предположим, что можно представить все свойства как функции времени.

Определение 2.1. Пусть W — множество, элементы которого называются *объекты*, и E множество, элементы которого называются *свойства*. Дальше обозначим через T множество, элементы которого называются *временными локализациями*. Каждому свойству $e \in E_x \subseteq E$ объекта $x \in W$ присоединим *множество значений* D_e и *свойственную функцию*

$$w_x^e : T \to D_e. \tag{2.1}$$

Эта функция может быть частично определена. Квадруплет

$$(e, x, w_x^e(t), t) \in \{ e \} \times \{ x \} \times D_e \times T \tag{2.2}$$

называется *свойством объекта x в t*. Тупель

$$w_x(t) = \big(w_x^e(t)\big)_{e \in E_x} \tag{2.3}$$

называется *линией мира* объекта x. $\Diamond$

Определение 2.2. Пусть W — множество объектов. Если для каждого $x \in W$ существует линия мира $w_x(t)$, то пара $w = (W, \{ w_x(t) \mid x \in W \})$ называется *миром*.

Если далее существует множество L *требований* линий мира, то w называют *(физически) возможным миром* относительно L, если линии мира w выполняют эти требования. Иначе она называется *(физически) невозможным миром*. Требования из L называются *естественными* или *физическими законами*. $\Diamond$

Определение 2.3. Пусть $x \in W$ — объект и $w_x(t)$ — линия мира данного объекта, и существует множество $T_x \subseteq T$. Тогда $w_x(t)|_{T_x}$ обозначает *частичную линию мира*, то есть, линию мира, свойственные функции которой точно определены для тех элементов из T_x, где они определены в T. $\Diamond$

Определение 2.4. Пусть $w = (W, \{ w_x(t) \mid x \in W \})$ — мир и $W_s \subseteq W$ — непустое множество объектов мира. И пусть каждому элементу $x \in W_s$ присоединено непустое множество временных локализаций $T_x \subseteq T$, так что для каждого элемента x существует по меньшей мере точка времени $t \in T_x$, для которой определена линия мира $w_x(t)$.

Пара $s = (W_s, \{ w_x(t)|_{T_x} \mid x \in W_s \})$ называется *реальной ситуацией* мира w. Множество всех ситуаций мира w обозначим $\mathfrak{S}$.

Оператор Obj влияет на ситуации соответственно тождества

$$\mathrm{Obj}(s) := W_s \tag{2.4}$$

и обозначает *множество W_s объектов ситуации.* ◊

Вывод 2.5. *Если верно*

$$\{ x \in W \mid w_x(t) \textit{ нигде не определено} \} = \emptyset, \tag{2.5}$$

то мир w является своей реальной ситуацией.

Доказательство. Пусть $W_s = W$ и $T_x = T$ для всех $x \in W$. Пусть

$$s := (W_s, \{ w_x(t)|_{T_x} \mid x \in W_s \})$$

глобальная ситуация. Тогда верно $s \in \mathfrak{S}$, так как включение из определения 2.4 (на странице 25) также выполнено результированным тождеством. □

Замечание 2.6. Иногда мы считаем мир w ситуацией, хотя он в узком смысле ей не является. Тогда мы говорим о ситуации

$$w' = (W', \{ w_x(t) \mid x \in W' \}) \tag{2.6}$$

с

$$W' = W \setminus \{ x \in W \mid w_x(t) \text{ нигде не определено} \}. \tag{2.7}$$

Замечание 2.7. Рассмотренные нами ситуации часто включают временные и — если мир допускает таковое — пространственные области, которые не обязательно являются связанными. В зависимости от того, меняется ситуация в потоке времени или нет, ее называют *статичной* или *динамичной ситуацией*. Тем временем, как статичная ситуация включает только некоторое число одновременных пространственных локализаций, динамичная ситуация включает временный ряд таких локализаций.

Определение 2.8. Пусть $s_1 = (W_{s_1}, F_{s_1}) \in \mathfrak{S}$ и $s_2 = (W_{s_2}, F_{s_2}) \in \mathfrak{S}$ — две ситуации и $W_{s_1} \subseteq W_{s_2}$. Если для каждого объекта $x \in W_{s_1}$ и каждого его свойства e определена свойственная функция $w^e_{x,2}(t)$ в линие мира $w_{x,2}(t)$ из F_{s_2} во всех точках времени, где также существует $w^e_{x,1}(t)$ из F_{s_1}, и в этих точках верно

$$w^e_{x,1}(t) = w^e_{x,2}(t), \tag{2.8}$$

то s_1 называется *подситуацией* ситуации s_2. Это обозначим $s_1 \subseteq s_2$. $\Diamond$

Вывод 2.9. *Отношение $\subseteq$ является частичным порядком на $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Надо показать три свойства частичного порядка, рефлексивность, антисимметричность и транзитивность. Пусть s_1 и s_2 заданы, как в определении 2.8 (стр. 26). То для этих свойств верно:

Рефлексивность. Для $s_1 = s_2$ верно:

$$W_{s_1} = W_{s_2}.$$

Кроме того свойственные функции $w^e_{x,1}(t)$ и $w^e_{x,2}(t)$ — определенны в одних и тех же точках, и являются там равными. При этом верно $s_1 \subseteq s_2$ и $s_2 \subseteq s_1$.

Антисимметричность. Пусть выполнены $s_1 \subseteq s_2$ и $s_2 \subseteq s_1$, то для множества объектов следует:

$$W_{s_1} \subseteq W_{s_2} \text{ и } W_{s_1} \supseteq W_{s_2}.$$

При этом верно $W_{s_1} = W_{s_2}$. Рассмотрим свойственные функции $w^e_{x,1}(t)$ и $w^e_{x,2}(t)$. Пусть $w^e_{x,1}(t)$ определена в точке времени t_1. То из $s_1 \subseteq s_2$ $w^e_{x,2}(t)$ определена в точке времени t_1. Из этого же условия следует $w^e_{x,1}(t_1) = w^e_{x,2}(t_1)$. Аналогично, из простого существования определенного значения для $w^e_{x,2}(t_2)$ следует $w^e_{x,1}(t_2) = w^e_{x,2}(t_2)$. При этом выполняется $w^e_{x,1}(t) = w^e_{x,2}(t)$ для всех свойств e. Это значит, что для множества частичных линий мира $F_{s_1} = F_{s_2}$. При этом также верно $s_1 = s_2$.

Транзитивность. Пусть ситуации s_1, s_2 и s_3 выполняют условия

$$s_1 \subseteq s_2 \text{ и } s_2 \subseteq s_3,$$

то для множеств объектов следует:

$$W_{s_1} \subseteq W_{s_2} \subseteq W_{s_3}, \text{ следовательно } W_{s_1} \subseteq W_{s_3}.$$

Если свойственная функция $w^e_{x,1}(t)$ объекта x из W_{s_1} определена в точке времени t_1, то существуют при включении ситуаций соответственные свойственные функции $w^e_{x,2}(t)$ и $w^e_{x,3}(t)$ ситуаций s_2 и s_3. Те также определенны для точки времени t_1 (для s_2 при s_1 и для s_3 при s_2). Кроме того, для точки времени t_1 справедливо

$$w^e_{x,1}(t_1) = w^e_{x,2}(t_1) = w^e_{x,3}(t_1) \text{ итак } w^e_{x,1}(t_1) = w^e_{x,3}(t_1).$$

При этом верно $s_1 \subseteq s_3$.

Следовательно, $\subseteq$ действительно — частичный порядок. □

Теорема 2.10. *Множество $\mathfrak{S}$ всех ситуаций с отношением $\subseteq$ составляет верхнюю полурешетку. При включении пустой ситуации $s_\emptyset = (\emptyset, \emptyset)$ получается даже полная решетка.*

Доказательство. Пусть $S = \{ s_j \mid j \in J \} \subseteq \mathfrak{S}$ множество ситуаций мира w. Тогда существует по меньшей мере одна ситуация s_e, которая выполняет равенство $s_j \subseteq s_e$ для всех $j \in J$. Частичные линии мира $w_x(t)|_{T_x^j}$ и $w_x(t)|_{T_x^k}$ объекта x, который встречается в двух ситуациях s_j и s_k, то есть который выполняет $x \in W_{s_j}$ и $x \in W_{s_k}$, равны в общих точках (смотри определение 2.4, страница 25). Таким образом возможно получение общей линии мира $w_x(t)|_{T_x}$ из всех частичных линий мира объекта x в то время, как значение $w_x(t)|_{T_x}$ в точке времени

$$t \in T_x := \bigcup_{j \in J} T_x^j$$

выбрано из той ситуации, в какой оно определенно. Если не существует такого значения, то частичная линия мира остается неопределена в этой точке.

Рассмотрим

$$W_s = \bigcup_{j \in J} W_{s_j} \text{ и}$$
$$F_s = \{ w_x(t)|_{T_x} \mid x \in W_s \},$$

то $s = (W_s, F_s)$ является реальной ситуацией. Верно:

$$s = \sup_{j \in J} s_j.$$

Остается только показать, что s является наименьшей из всех реальных ситуаций, которые охватывают множество всех s_j. Это следует из конструкции ситуации s, потому что для каждого $x \in W_s$ и для каждого $t \in T_x$ существует такая ситуация s_j, что $x \in W_{s_j}$ и $w_x(t)|_{T_x^j}$ в соответствующей линии мира. Следовательно, если для ситуации

$$s' = (W_{s'}, \{\, w_x(t)|_{T_x'} \mid x \in W_{s'} \,\})$$

условие $s_j \subseteq s'$ справедливо для всех $j \in J$, то для каждого объекта $x \in W_s$ следует: $T_x \subseteq T_x'$. Следовательно, $s \subseteq s'$. Значит, s является точной верхней гранью множества $\{\, s_j \mid j \in J \,\}$.

Перейдем к инфимуму. Пусть для конкретной ситуации s_j и для конкретного объекта $x \in W_{s_j}$ T_x^j является множеством точек, в которых определена частичная линия мира $w_x(t)|_{T_x^j}$.

Пусть $\operatorname{def} w_x(t)$ — область определенности линии мира $w_x(t)$. Дальше верно

$$M' = \Big\{\, x \in \bigcap_{j\in J} W_j \;\Big|\; \bigcap_{j\in J} T_x^j \cap \operatorname{def} w_x(t) = \emptyset \,\Big\}$$

и

$$W_s = \bigcap_{j\in J} W_j \setminus M'.$$

Пусть для каждого $x \in W_s$

$$T_x = \bigcap_{j\in J} T_x^j.$$

Для каждой фиксированной точки времени $t \in T_x$ значение всех частичных линий мира $w_x(t)|_{T_x^j}$ идентично для всех ситуаций s_j (смотри определение 2.4, страница 25). Оно тоже является значением частичной линии мира $w_x(t)|_{T_x}$. Итак, можно определить ситуацию

$$s = (W_s, F_s)$$

при условии

$$F_s = \{\, w_x(t)|_{T_x} \mid x \in W_s \,\}.$$

Тогда верно $s \in \mathfrak{S} \cup \{\, s_\emptyset \,\}$. Если $W_s = \emptyset$, то также $F_s = \emptyset$. В противном случае каждый объект $x \in M$ выполняет условие $x \notin M'$, значит $\bigcap_{j\in J} T_x^j \neq \emptyset$. С другой стороны удовлетворяется отношение

$$\bigcap_{j\in J} W_j \subseteq W.$$

Так как все частичные линии мира являются сокращениями соответствующих линий мира, это также верно для множества F_s.

В конце концов остается показать, что ситуация s является точной нижней гранью множества

$$\{ s_j \mid j \in J \}.$$

Прежде всего, из-за формирования пересечения верно $s \subseteq s_j$ для всех $j \in J$. Если $s = s_\emptyset$, то это условие выполнено для всех $s' \in \mathfrak{S}$. Пусть сейчас $s \neq s_\emptyset$. Допустим также, что $s' = (W_{s'}, F_{s'}) \in \mathfrak{S}$ — любая ситуация, при которой выполняется $s' \subseteq s_j$ для всех $j \in J$. Тогда верно для каждого объекта $x \in W_{s'}$: $x \in W_j$ для всех $j \in J$, значит также $x \in W_s$. Для

$$F_{s'} = \{ w_x(t)|_{T'_x} \mid x \in W_{s'} \}$$

верно: $T'_x \subseteq T^j_x$ для всех $j \in J$. Таким образом $T'_x \subseteq T_x$ — выполнено. Следовательно, $s' \subseteq s$. Из этого следует, что $s = \inf\{ s_j \mid j \in J \}$.

Для каждого множества ситуаций S существуют при этом как и точная нижняя грань $\inf S$, так и точная верхняя грань $\sup S$ в $\mathfrak{S} \cup \{ s_\emptyset \}$, причем $\mathfrak{S} \cup \{ s_\emptyset \}$ является полной решеткой. $\square$

Замечание 2.11. Как и в последнем доказательстве мы в дальнейшим используем обозначения

$$s_1 \cup s_2 := \sup\{ s_1, s_2 \} \text{ и} \tag{2.9a}$$

$$s_1 \cap s_2 := \inf\{ s_1, s_2 \}. \tag{2.9b}$$

2.2 Пример мира

Здесь будет представлено описание дискового мира из области кубиков в качестве наглядного примера.

Дана стольная доска p, на которой лежат три куба w_1, w_2 и w_3. Кубик w_1 расположен на кубике w_2, который лежит рядом с w_3 на доске и соприкасается в свою очередь с кубиком w_3 На рисунке 2.1 (страница 30) представлена эта ситуация во времени $t = 0$. Если все три кубика лежат друг на друге, то они составляют башню. Все кубики, башни и доска составляют множество объектов мира.

Ради простоты позиции объектов являются здесь целочисленными координатами. Для этого будем использовать множество $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^2$; координаты x и y выбраны из множества целых чисел, а координата z и время t — из множества естественных чисел.

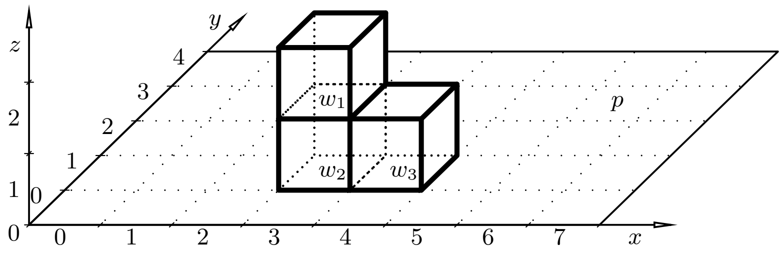


Рис. 2.1: Мир кубиков

В точке времени $t_0 = 0$ кубик w_1 находится в координатах $(3, 1, 2)$, кубик w_2 — в $(3, 1, 1)$ и кубик w_3 — в $(4, 1, 1)$. Достаточно описать позицию кубиков координатами левого переднего верхнего угла, потому что все кубики конкруентны и всегда проведены в позицию параллельно осям. Доска имеет размер от $(0, 0, 0)$ до $(7, 4, 0)$. При этом каждый элемент множества

$$\{\,0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\,\} \times \{\,0, 1, 2, 3, 4\,\} \times \{\,0\,\}$$

принадлежит координатам доски. Каждый трипель координат соответствует квадрату, левый передний угол которого он описывает. При этом доска имеет размер 8×6 квадратов.

Обозначим эту ситуацию (мир во время $t_0 = 0$) через s_1. Другая ситуация s_2 дана для момента времени $t_1 = 3$, которая отличается от ситуации s_1 только тем, что в данный момент w_1 лежит больше не на w_2, а — на w_3. Следовательно, он имеет координаты $(4, 1, 2)$. В таблице 2.1 объединены целые образки из линий мира первых восьмых точек времени. В периоде $\{\,4, 5, 6\,\}$ кубики составляют башню.

С помощью этого можно образовать динамичную ситуацию s_3 из статических ситуаций s_1 и s_2. Эта ситуация не обязательно простирается через связный период. Между t_0 и t_1 может быть временный промежуток, в котором мог бы быть перемещенный кубик w_1 или же иные состояния, что и случится в данном примере.

Каждый кубик нуждается в подставке. Это значит, что обязательно какой-нибудь объект находится под ним. Но заранее необходимо дать определения нескольким отношениям на множестве W:

Объект o_1 с координатами $\bigl(x_1(t), y_1(t), z_1(t)\bigr)$ находится в точке времени t *на* другом объекте o_2 тогда и только тогда, когда в этой точке времени o_2 имеет координаты $\bigl(x_2(t), y_2(t), z_2(t)\bigr)$ и верно

$$z_1(t) = z_2(t) + 1, \text{ а также } x_1(t) = x_2(t) \text{ и } y_1(t) = y_2(t)$$

Время	w_1	w_2	w_3	$w_{\text{Turm 1}}$
0	$(3,1,2)$	$(3,1,1)$	$(4,1,1)$	–
1	$(2,1,1)$	$(4,1,2)$	$(4,1,1)$	–
2	$(3,1,1)$	$(4,2,1)$	$(4,1,1)$	–
3	$(4,1,2)$	$(3,1,1)$	$(4,1,1)$	–
4	$(4,1,3)$	$(4,1,1)$	$(4,1,2)$	$(4,1,1,3)$
5	$(4,1,3)$	$(4,1,1)$	$(4,1,2)$	$(4,1,1,3)$
6	$(4,2,3)$	$(4,2,1)$	$(4,2,2)$	$(4,2,1,3)$
7	$(3,2,1)$	$(5,2,1)$	$(5,3,1)$	–
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Таблица 2.1: Линии мира кубиков и башни в точках времени с $t = 0$ по $t = 7$

В этом случае o_2 находится *под* объектом o_1. Если верно $z_1(t) = z_2(t)$, то o_1 находится *рядом* с o_2. Объект o_1 находится *выше* o_2, если для одной пары $\big(x_2(t), y_2(t)\big)$ кроме условий $x_1(t) = x_2(t)$ и $y_1(t) = y_2(t)$ верно также $z_1(t) > z_2(t)$. Объекты o_1 и o_2 будут соприкасаться, если выполняется условие

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)| + |z_1(t) - z_2(t)| = 1. \tag{2.10}$$

В конце концов, объект o_3 находится в точке времени t *между* o_1 и o_2, если существует такое положительное вещественное число a, что выполняется:

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_3(t) &= a\big(x_3(t) - x_2(t)\big), \\ y_1(t) - y_3(t) &= a\big(y_3(t) - y_2(t)\big) \text{ и} \\ z_1(t) - z_3(t) &= a\big(z_3(t) - z_2(t)\big). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для до того описанных отношений достаточно, если соответствующие связи выполнены только одним триплетом каждого объекта.

После геометрии мы перейдем к физике: Там, где находится один корпус, одновременно не может находится другой. Таким образом, множества триплетов координат обязаны быть непересекающимися. Для кубиков это значит:

$$|x_1(t) - x_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)| + |z_1(t) - z_2(t)| \geq 1.$$

Кроме того, на кубики действует сила гравитации: Под каждым кубиком всегда находится другой объект. У доски стола по определению самая низкая координата, и она является поверхностью мира, на которой существуют кубики. Во течение одной единицы времени кубики могут переместиться точно на одну единицу горизонтально и/или вертикально выше:

$$\max\{\, |x_1(t) - x_1(t+1)|, |y_1(t) - y_1(t+1)|, |z_1(t) - z_1(t+1)| \,\} = 1.$$

Существует одно исключение. Если во время $t + 1$ под целевой точке кубика не существует никакого другого объекта, тогда он падает вниз, пока он не имеет подставку. Конечная подставка — либо другой кубик, либо доска стола. При этом нам только надо заниматься квадром пространства параллельно осям, который натягивают точки $(0,0,0)$ и $(7,4,3)$ потому, что остаток мира непременно пуст.

Потому что миры замкнутые системы, никакие объекты не могут исчезать полностью. Возможно лишь разбирание в раньше существующие части.

2.3 Основные инфоны и их представление

2.3.1 Представление инфонов

Много информаций скрыты в образах, звуках и чувствах, которыми обладает человек. Но мы не можем напрямую использовать большинство этих информаций. Они являются слишком комплексными для прямой переработки. Для работы с ними необходимо придать им изначально форму, такую например, как: „Эта книга старше той.“ или „Это дерево имеет высоту 20 метров.“ Этот процесс придании информаций подобной формой называется *дигитализацией* (смотри также Devlin 1993, стр. 29—34).[1]

Для сохранения и переработки дигитализированной информации ее представляют подходящим образом (например, буквы на листе бумаги, структуры в головном мозге, конфигурации электронов в микросхемах и так далее). Рядом с этим *представлением*, которое обозначим здесь через D, используем так названную *связь* B, то есть правило читания (смотри и главу 2.5, стр. 68), которая связывает его с соответствующей информацией.

Пара $\langle D, B\rangle$ — это, так называемое, *содержание информации*. Если два содержания информаций $\langle D, B\rangle$ и $\langle D', B'\rangle$ обозначают одну и ту же информацию, то мы описываем это с помощью соотношения $\approx$. В оптимальном случае это соотношение является соотношением эквивалентности. Его смежные классы являются тем, чем можно представить в смысле под словом „инфон“: Информация, независимая от ее представления.

В следующим, мы занимаемся специальном видом представлении инфонов. Исходным пунктом будет являться — так называемое отношение.

[1] Это касается между прочим (Dretske 1981, стр. 135—141).

Определение 2.12. Пусть $\mathfrak{G}$ — множество, элементы которого называются *основными типами*, и $\mathfrak{R}$ — множество знаков отношений, причем каждому отношению $R \in \mathfrak{R}$ присоединена арность $n \in \mathbb{N}_0$ и n мест с обозначениями $s_1, \ldots,$ s_n и для каждого места один основный тип $G_1, \ldots, G_n \in \mathfrak{G}$. То упорядоченная пара $\Sigma = (\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$ называется *сигнатурой*. $\diamondsuit$

Замечание 2.13. Каждому основному типу G присоединим непустое *множество данных* D_G и его не пересекаемое непустое *множество параметров* V_G. В следующим обозначим элементы множества данных через a, b, ... а элементы множества параметров через $\dot{a}$, $\dot{b}$, ...

Определение 2.14. Пусть $G \in \mathfrak{G}$ — основный тип и $D_T \subseteq D_G$ и $V_T \subseteq V_G$ — любые множества (данных и параметров). Тогда T называется *частичным типом* типа G $(T : G)$. Множество всех частичных типов типа G обозначим через $\mathfrak{T}_G$.

$$\mathfrak{T}(\Sigma) := \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} \mathfrak{T}_G \tag{2.12}$$

называется *множеством всех типов* сигнатуры Σ.

Если верно, что $T_1 : T_2$ и $T_2 : T_1$, то оба типа называются *синтаксически равными*. Для того резервировано обозначение $T_1 \doteq T_2$. $\diamondsuit$

Определение 2.15. Пусть T — тип. Факт $x \in D_T$, значит, что x — аргумент типа T, обозначим *параметрическим высказыванием* формы

$$x : T. \tag{2.13}$$

Аналогично обозначим $\dot{x} \in V_T$ с помощью

$$\dot{x} : T. \tag{2.14}$$

$\diamondsuit$

Замечание 2.16. Keith Devlin использует основные типы из таблицы 2.2 (стр 34). При этом он считает пространственные и временные локализации точками и районами в пространстве и во времени. Это может быть таким:

Временная локализация $t \subseteq \mathbb{R}$ является конечным объединением отрезков вещественных чисел или специальным элементом „Неопределенный“ u_t. В дальнейшем обозначим множество временных локализаций как D_{TIM}. Соответственно обозначим временный параметр через $\dot{t} \in V_{TIM}$.

Пространственная локализация l является специальным элементом „Неопределенный“ u_l или отображением $l : t \to \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$, если $t \subseteq \mathbb{R}$, или постоянным множеством $l \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^d)$, если $t = u_t$. Дальше обозначим множество пространственных локализаций D_{LOC}, а множество их параметров $\dot{l}$ через V_{LOC}.

REL^n	тип n-местного отношения,
SIT	тип ситуации,
IND	тип индивидуума,
INF	тип инфона,
TYP	тип типа,
PAR	тип параметра,
LOC	тип пространственной локализации,
TIM	тип временной локализации
POL	тип поляритета.

Таблица 2.2: Типы используемые в (Devlin 1993)

Перекрывание двух пространственных локализаций l и l' обозначим $l \circ l'$. Аналогично $t \circ t'$ написано вместо *временного перекрывания*. Перекрывание существует, если $l \cap l' \neq \emptyset$ или $t \cap t' \neq \emptyset$.

$t \prec t'$ обозначает, что t лежит раньше по времени чем t'. В частности: каждая точка времени из t лежит раньше по времени, чем все точки времени из t'.

Пример 2.17. Рассмотрим пример, представленный в главе 2.2, стр. 29.

IND	K (тело)	P (доска стола) W (кубик) TU (башня)
TIM		
LOC		
REL^n	REL^1 REL^2 REL^3 REL^4	
TYP		
INF		
POL		
SIT		

Таблица 2.3: Типы мира кубиков

Следовательно типизации KEITHа DEVLINа, имеем типы, представленные в таблице 2.3 (стр. 34). При этом существует следующий частичный порядок типов: типы, находящиеся правее являются более специальными, то есть частичными типами, тех, которые находятся левее. Для каждого типа T существует множество данных D_T. Соответствующие примеры приведены в таблице 2.4 (стр. 35).

$$
\begin{aligned}
D_P &= \{\, p \,\} \\
D_W &= \{\, w_1, w_2, w_3 \,\} \\
D_{TU} &= \{\, w_{\text{Turm 1}} \,\} \\
D_K &= D_P \cup D_W \cup D_{TU} \\
D_{IND} &= D_K \\
D_{REL^1} &= \{\, \text{ist\_vom\_Typ\_}P, \text{ist\_vom\_Typ\_}W, \\
&\quad \text{ist\_vom\_Typ\_}K, \text{ist\_vom\_Typ\_}IND, \\
&\quad \text{ist\_vom\_Typ\_}REL^1, \text{ist\_vom\_Typ\_}REL^2, \\
&\quad \text{ist\_vom\_Typ\_}REL^3, \text{ist\_vom\_Typ\_}REL^n, \\
&\quad \text{ist\_vom\_Typ\_}TYP \,\} \\
D_{REL^2} &= \{\, \text{ist\_vom\_Typ} \,\} \\
D_{REL^3} &= \{\, \text{auf}, \text{unter}, \text{neben}, \text{berührt}, \text{oberhalb}, \text{unterhalb} \,\} \\
D_{REL^4} &= \{\, \text{zwischen} \,\} \\
D_{REL^n} &= D_{REL^1} \cup D_{REL^2} \cup D_{REL^3} \cup D_{REL^4} \\
D_{TYP} &= \{\, P, W, K, IND, REL^1 REL^2, REL^3, REL^n, TYP \,\}
\end{aligned}
$$

Таблица 2.4: Множества данных мира кубиков

В следующих примерах будем иметь дело только с типами IND, TIM и LOC. Для использования других типов из таблицы 2.3 нужна более общая логика — например некая степенная логика, как она существует для предикативной логики.

Определение 2.18. Пусть $R \in \mathfrak{R}$ — n-местное отношение, $D_1, \ldots, D_n$ — подходящие множества данных типов мест отношения с названиями s_1 до s_n, $V_1, \ldots, V_n$ подходящие множества параметров и

$$a_1 \in D_1 \cup V_1, \ldots, a_n \in D_n \cup V_n$$

аргументы подходящей типизации для места с названиями $s_1, \ldots, s_n$. То $n+3$-туплет

$$\underline{\sigma} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, Zeit \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle \tag{2.15}$$

называется *основным представлением инфона*, если $i \in \{0, 1\}$. Значение i называется *поляризацией*.

Если верно, что $a_1 \in D_1, \ldots, a_n \in D_n$, то $\underline{\sigma}$ называется *основным, непараметрическим представлением инфона*, в противном случае — *основным, параметрическим представлением инфона*.

Множество всех представлений инфонов сигнатуры Σ обозначается $\mathfrak{I}_d(\Sigma)$.

Множество всех индивидуумов представления инфонов σ обозначим

$$\mathrm{Obj}(\underline{\sigma}) := \{\, a_j \mid \underline{\sigma} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle, 1 \leq j \leq n \,\} \cap D_{IND} \tag{2.16}$$

Аналогично

$$\mathrm{Obj}(I) := \bigcup_{\underline{\sigma} \in I} \mathrm{Obj}(\underline{\sigma}) \tag{2.17}$$

обозначает множество индивидуумов множества $I \subseteq \mathfrak{I}_d(\Sigma)$ представлений инфонов. $\Diamond$

Замечание 2.19. Порядок, в которой написаны аргументы представления инфонов, у Keithа Devlinа — неопределен. Аргументы соответствуют местам согласно их названиям (как, например, у релациональных баз данных). Если соответствие очевидно, то часто пишут представление инфона формой $\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, t, i \rangle\!\rangle$.

Пример 2.20. С помощью основных типов примера 2.17, стр. 34, можно устроить много представлений инфонов. Некоторые из них составлены в таблице 2.5 на странице 37. При этом поляризации произвольно выбраны. Можно было использовать 0 для каждой 1 и наоборот. Здесь являются представления инфонов $\underline{\sigma}_1$ до $\underline{\sigma}_{16}$ основными и непараметрическим. В противоположность этому $\underline{\sigma}_{17}$ — основное параметрическое представление инфона.

Замечание 2.21. Во множестве данных D_j аргументов можно (и часто так делают) включить значение „Неопределено“ u_j. Какие множества являются такими зависит от сигнатуры. Их обычно не пишут. При них использовании будем ссылаться на главу 2.4.2 со страницы 63; особенно на замечание 2.77 (стр. 64).

Определение 2.22. Представление инфона

$$\langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle$$

называется *насыщенным*, если нет такого места, которое имело бы неопределенное значение. Иначе оно называется *ненасыщенным*. $\Diamond$

$$
\begin{aligned}
\underline{\sigma}_1 &= \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_1, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_2 &= \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_1, 0\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_3 &= \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_2, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_4 &= \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_3, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_5 &= \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, p, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_6 &= \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, p, 0\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_7 &= \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, w_1, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_8 &= \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, w_1, 0\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_9 &= \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_{10} &= \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 0\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_{11} &= \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 0\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_{12} &= \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_2, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_{13} &= \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_3, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow 33, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_{14} &= \langle\!\langle \text{neben}, \mathit{Objekt}_1 \rightsquigarrow w_2, \mathit{Objekt}_2 \rightsquigarrow w_3, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_{15} &= \langle\!\langle \text{zwischen}, \mathit{außen}_1 \rightsquigarrow w_1, \mathit{Mitte} \rightsquigarrow p, \mathit{außen}_2 \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_{16} &= \langle\!\langle \text{oberhalb}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1\rangle\!\rangle\\
\underline{\sigma}_{17} &= \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, \dot{p}, 1\rangle\!\rangle
\end{aligned}
$$

Таблица 2.5: Несколько представлений инфонов мира кубиков

Определение 2.23. Пусть $\underline{\sigma} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i\rangle\!\rangle$ — представление инфона. Двойственное представление инфона $\overline{\underline{\sigma}}$ определяется формулой

$$\overline{\underline{\sigma}} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, 1-i\rangle\!\rangle. \tag{2.18}$$

$\diamondsuit$

Вывод 2.24. *Для двойственного представления инфона* $\underline{\sigma}_2 = \overline{\underline{\sigma}}_1$ *представления инфона* $\underline{\sigma}_1$ *верно:*

$$\overline{\underline{\sigma}}_2 = \underline{\sigma}_1. \tag{2.19}$$

Доказательство. Выше указанное является верным, если мы применим уравнение $1-(1-i) = i$ на (2.18). $\square$

2.3.2 Инфон и поддержка

Определение 2.25. Пусть $\Sigma = (\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$ — сигнатура и D_G для $G \in \mathfrak{G}$ — соответствующие множества данных для отношений из $\mathfrak{R}$. Допустим также, что $w = (W, F)$ — мир, E множество всех свойств, для которых существуют свойственные функции $w_x^e(t)$ в линиях мира $w_x(t) \in F$, и D_e — множество значений свойственных функций $w_x^e(t)$ для $x \in W$ для каждого свойства $e \in E$.

Частично определенная функция

$$\mathbb{I}^I : \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} (D_G \cup V_G) \to W \cup T \cup \bigcup_{e \in E} D_e \cup \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} V_G, \tag{2.20}$$

называется *интерпретацией индивидуумов* сигнатуры Σ, если верно:

$$\{\, \mathbb{I}^I(a) \mid a \in D_{TIM} \,\} \subseteq T, \tag{2.21}$$

$$\mathbb{I}^I(\dot{p}) = \dot{p} \text{ für alle } \dot{p} \in \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} V_G \text{ и:} \tag{2.22}$$

$$\text{если } a = \text{„Неопределено“, то } \mathbb{I}^I(a) \text{ остается также неопределена.} \tag{2.23}$$

Пусть частично определенная функция $\mathbb{I}^R$ определена формулой

$$\mathbb{I}^R : \mathfrak{R} \to \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0 \\ e_j \in E}} \mathfrak{P}\Bigg(\Big(W \times D_{e_1^1} \times \cdots \times D_{e_{k_1}^1}\Big) \times \cdots$$

$$\cdots \times \Big(W \times D_{e_1^m} \times \cdots \times D_{e_{k_m}^m}\Big) \times T\Bigg), \tag{2.24}$$

причем к каждому месту s отношения R присоединена пара (j_s, k_s) так, что

$$\mathbb{I}^I(D_s) \subseteq D_{e_{k_s}^{j_s}} \text{ для } k_s \neq 0, \tag{2.25}$$

или же верно

$$\mathbb{I}^I(D_s) \subseteq W \text{ для } k_s = 0, \tag{2.26}$$

и для каждого $j \in \{\, 1, \ldots, m \,\}$ существует место s с $j_s = j$ и $k_s = 0$. То функция $\mathbb{I}^R(R)$ называется *интерпретацией отношении* R.

Для представления инфона $\underline{\sigma} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle$ обозначим через

$$\mathbb{I}^T(\underline{\sigma}) := \big((x_0^1, \ldots, x_{k_1}^1), \ldots, (x_0^m, \ldots, x_{k_m}^m), \mathbb{I}^I(t)\big) \tag{2.27}$$

интерпретацию представления, если выполняются следующие условия

1. Для каждого $j \in \{1, \ldots, m\}$ существует такое место s, для которого верно $j_s = j$ и $k_s = 0$.

2. Для всех мест s верно:
$$x_{k_s}^{j_s} = \mathbb{I}^I(a_s), \tag{2.28}$$

3. Для всех остальных x_k^j верно:

$$\begin{gathered} x_k^j \text{ остается неопределено, если } x_0^k \text{ параметр,} \\ x_k^j = w_{x_0^k}^{e_k^j}(t), \text{ иначе.} \end{gathered} \tag{2.29}$$

Триплет $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$ называется *интерпретацией* сигнатуры Σ. $\Diamond$

Пример 2.26. Для нашего примера, приведенного в главе 2.2, нам также необходима подходящая интерпретация $\mathbb{I}$. Часть ее определения описана ниже.

Для интерпретации индивидуумов верно

$$\begin{gathered} \mathbb{I}^I(w_1) = w_1, \mathbb{I}^I(w_2) = w_2, \mathbb{I}^I(w_3) = w_3, \\ \mathbb{I}^I(w_{\text{Turm } 1}) = w_{\text{Turm } 1}, \mathbb{I}^I(p) = p \text{ и } \mathbb{I}^I(t) = t. \end{gathered}$$

Отношения „auf“ (на) и „unter“ (под) интерпретируются следующим образом:

$$\begin{gathered} \big((a, x_a, y_a, z_a), (b, x_b, y_b, z_b), t\big) \in \mathbb{I}^R(\text{auf}) \text{ и} \\ \big((b, x_b, y_b, z_b), (a, x_a, y_a, z_a), t\big) \in \mathbb{I}^R(\text{unter}) \end{gathered}$$

тогда и только тогда, когда a и b — кубики, и верно

$$x_a(t) = x_b(t),\ y_a(t) = y_b(t) \text{ и } z_b(t) = 1 + z_a(t),$$

или когда a — доска стола, и b — кубик и, верно

$$x_a(t) \leq x_b(t) \leq x_a(t) + 7,\ y_a(t) \leq y_b(t) \leq y_a + 5 \text{ и } z_b(t) = 1 + z_a(t),$$

либо же когда a — кубик, и b — доска стола, и условия

$$x_b(t) \leq x_a(t) \leq x_b(t) + 7,\ y_b(t) \leq y_a(t) \leq y_b + 5 \text{ и } z_b(t) = 1 + z_a(t),$$

соответствуют действительности. x_a и y_a здесь — левый передний угол доски.

Соответствующая интерпретация является

$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{auf}, \textit{oben} \rightsquigarrow a, \textit{unten} \rightsquigarrow b, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t, i\rangle\!\rangle\big) = \\ \bigg(\Big(\mathbb{I}^I(a), w^x_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \\ \Big(\mathbb{I}^I(b), w^x_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \mathbb{I}^I(t)\bigg),$$

$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{unter}, \textit{unten} \rightsquigarrow a, \textit{oben} \rightsquigarrow b, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t, i\rangle\!\rangle\big) = \\ \bigg(\Big(\mathbb{I}^I(a), w^x_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \\ \Big(\mathbb{I}^I(b), w^x_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \mathbb{I}^I(t)\bigg).$$

Соответственно верно для других отношений:

$$\mathbb{I}^R(\text{ist\_vom\_Typ\_W}) = \{\, w_1, w_2, w_3 \,\},$$
$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_W}, \textit{Objekt} \rightsquigarrow a, i\rangle\!\rangle\big) = \big(\mathbb{I}^I(a)\big),$$
$$\mathbb{I}^R(\text{ist\_vom\_Typ\_W}) = \{\, p \,\},$$
$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_W}, \textit{Objekt} \rightsquigarrow a, i\rangle\!\rangle\big) = \big(\mathbb{I}^I(a)\big),$$
$$\mathbb{I}^R(\text{neben}) = \Big\{\, \big((a, z_a(t)), (b, z_b(t)), t\big) \;\Big|\; z_a(t) = z_b(t) \,\Big\},$$

$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{neben}, \textit{Objekt}_1 \rightsquigarrow a, \textit{Objekt}_2 \rightsquigarrow b, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t, i\rangle\!\rangle\big) = \\ = \bigg(\Big(\mathbb{I}^I(a), w^z_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \Big(\mathbb{I}^I(b), w^z_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \mathbb{I}^I(t)\bigg),$$

$$\mathbb{I}^R(\text{zwischen}) = \Big\{\, \big((a, x_a, y_a, z_a), (b, x_b, y_b, z_b), (c, x_c, y_c, z_c), t\big) \;\Big| \\ b \text{ в точке времени } t \text{ между } a \text{ и } c \,\Big\},$$

$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{zwischen}, \textit{außen}_1 \rightsquigarrow a, \textit{Mitte} \rightsquigarrow b, \textit{außen}_2 \rightsquigarrow c, \textit{Zeit} \rightsquigarrow t, i\rangle\!\rangle\big) = \\ \bigg(\Big(\mathbb{I}^I(a), w^x_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \\ \Big(\mathbb{I}^I(b), w^x_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \\ \Big(\mathbb{I}^I(c), w^x_{\mathbb{I}^I(c)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(c)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(c)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \mathbb{I}^I(t)\bigg),$$

$$\mathbb{I}^R(\text{oberhalb}) = \{\, \big((a, x_a, y_a, z_a), (b, x_b, y_b, z_b), t\big) \mid \\ a \text{ в точке времени } t \text{ выше } b \,\},$$

$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \text{oberhalb}, \mathit{oben}_1 \rightsquigarrow a, \mathit{unten}_2 \rightsquigarrow b, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle\big) = \\ = \Bigg(\Big(\mathbb{I}^I(a), w^x_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(a)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \\ \Big(\mathbb{I}^I(b), w^x_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^y_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t)), w^z_{\mathbb{I}^I(b)}(\mathbb{I}^I(t))\Big), \mathbb{I}^I(t)\Bigg).$$

Формальное описание соотношений координат для вербальных описаний интерпретаций $\mathbb{I}^R(\text{zwischen})$ и $\mathbb{I}^R(\text{oberhalb})$ описано в главе 2.2 (точнее в части об отношениях со страницы 30).

При описании отношений ist_vom_Typ_W и ist_vom_Typ_P здесь не написано сознательно время t, так как их действительность не зависит от времени.

Определение 2.27. Пусть $\Sigma = (\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$ — сигнатура, $w = (W, F)$ — мир,

$$\underline{\sigma} = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, t', i \rangle\!\rangle$$

— представление инфона, и $\mathbb{I}$ — подходящая интерпретация.

Ситуация $s = (W_s, \{\, w_x(t)|_{T_x} \mid x \in W_s \,\}) \in \mathfrak{S}$ *поддерживает* представление инфона $\underline{\sigma}$ относительно интерпретации $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

Для насыщенных представлений инфонов: 1. верно: $i = 1$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{I}^T(\underline{\sigma}) \in \mathbb{I}^R(R), \tag{2.30}$$

$$\mathbb{I}^T(\underline{\sigma}) = \Big(\big(x^1_0, w^{e^1_1}_{x^1_0}(t)|_{T_{x^1_0}}, \ldots, w^{e^1_{k_1}}_{x^1_0}(t)|_{T_{x^1_0}}\big), \ldots \\ \ldots, \big(x^m_0, w^{e^m_1}_{x^m_0}(t)|_{T_{x^m_0}}, \ldots, w^{e^m_{k_m}}_{x^m_0}(t)|_{T_{x^m_0}}\big), t\Big) \tag{2.31}$$

и $t = \mathbb{I}^I(t')$, и когда все эти $w^{e^j_{k_j}}_{x^j_0}(t)|_{T_{x^j_0}}$ — определены в ситуации s, и

2. верно при обозначении относительно определения 2.25 при

$$\text{Obj}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle) := \{\, x^j_k \mid j \in \{\, 1, \ldots, m \,\}, k \in \{\, 0, \ldots, k_j \,\} \,\} \cap W \tag{2.32}$$

отношение

$$\text{Obj}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle) \subseteq \text{Obj}(s). \tag{2.33}$$

Для ненасыщенных представлений инфонов условия, подходящие для насыщенных представлений, также являются верными. При этом, по возможности, подбирается для каждого неопределенного места s_j элемент множества значения в ситуации s так, что получается туплет отношения $\mathbb{I}^R(R)$. Если это удается сделать, то ситуация поддерживает $\underline{\sigma}$ тогда и только тогда, когда полярность является $i = 1$; иначе она поддерживает $\underline{\sigma}$ тогда и только тогда, если $i = 0$.

Для того используем обозначение $s \vDash \langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$. Пара $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$ называется *содержанием информации* представления $\underline{\sigma}$ относительно интерпретации $\mathbb{I}$.

Множество $\mathrm{Obj}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle)$ называется *множеством объектов* и

$$\mathrm{Act}(\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle) := \{\, x_k^0 \mid j = 1, \ldots, m \,\} \tag{2.34}$$

множеством активных объектов содержания информации $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$. ◊

Вывод 2.28. *Если верно* $s \vDash \langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$*, то следует* $s \nvDash \langle \overline{\underline{\sigma}}, \mathbb{I} \rangle$.

Доказательство. Это следует из пункта 1 определения 2.27 (стр. 41). □

Пример 2.29. Обратимся к частю 2.2 (стр. 29) и тамошнему примеру. Некоторые содержания информаций, которые поддерживает наша ситуация s_1, собраны в таблице 2.6, которая находится на странице 43. При этом использована интерпретация примера 2.26 (стр. 39).

Определение 2.30. Пусть Σ_1 и Σ_2 — две сигнатуры, $w = (W, F)$ — мир и $\mathbb{I}_1$ и $\mathbb{I}_2$ — две интерпретации для этих сигнатур в мир w. Два содержания информации

$$\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle = \langle ⟪ R_1, s_1^1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n^1 \rightsquigarrow a_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_1, i_1 ⟫, (\mathbb{I}_1^I, \mathbb{I}_1^R, \mathbb{I}_1^T) \rangle$$

и

$$\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle = \langle ⟪ R_2, s_1^2 \rightsquigarrow b_1, \ldots, s_n^2 \rightsquigarrow b_n, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_2, i_2 ⟫, (\mathbb{I}_2^I, \mathbb{I}_2^R, \mathbb{I}_2^T) \rangle$$

называются *эквивалентными*, если существует такая перестановка π формы

$$\pi\big((x_0^1, \ldots, x_{k_1}^1), \ldots, (x_0^m, \ldots, x_{k_m}^m)\big) = \big((x_0^{\pi(1)}, \ldots, x_{k_{\pi(1)}}^{\pi(1)}), \ldots, (x_0^{\pi(m)}, \ldots, x_{k_{\pi(m)}}^{\pi(m)})\big) \tag{2.35}$$

на множестве (частичных) туплетов интерпретации $\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)$, что выполнены

$$
\begin{aligned}
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_1, 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_2, 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_3, 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, p, 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, w_1, 0 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 0 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_2, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_3, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{neben}, \mathit{Objekt}_1 \rightsquigarrow w_2, \mathit{Objekt}_2 \rightsquigarrow w_3, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{zwischen}, \mathit{außen}_1 \rightsquigarrow w_1, \mathit{Mitte} \rightsquigarrow w_2, \mathit{außen}_2 \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle\\
&s_1 \models \langle\langle\!\langle \text{oberhalb}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}\rangle
\end{aligned}
$$

Таблица 2.6: Содержания информации, которые поддерживает ситуация s_1

следующие условия:

1. $\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)$ и $i_1 = i_2$ или

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \Big(\pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)\Big)^{\mathsf{C}}$$

является дополнением отношения $\pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)$ относительно объектов и значений свойств в мире и $i_1 = 1 - i_2$,

2. если $\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\sigma_2)\big)$ — верно и

3. если для параметров $\dot{a}_k$ и $\dot{b}_j$ при $\dot{a}_k \in D_{G_k^1}$ и $\dot{b}_j \in D_{G_j^2}$, которые присоединяют $\mathbb{I}_1^T$ и $\pi \circ \mathbb{I}_2^T$ одного и того же места, значит, если при обозначении относительно (2.27) выполнено

$$\dot{a} = x^o_{l(k)}(k), \dot{p} = x^{\pi(o'(j))}_{l'(j)}, o(k) = \pi(o'(j)) \text{ и } l(k) = l'(k),$$

верно:

$$\{\, \mathbb{I}_1^I(a) \mid a \in D_{G_k^1} \,\} = \{\, \mathbb{I}_2^I(b) \mid b \in D_{G_j^2} \,\} \text{ и } \dot{a}_k = \dot{b}_j. \tag{2.36}$$

4. если для ненасыщенных представлений верно $i_1 = i_2$, и для каждого неопределенного места $s_{k'}$ типа $T_{k'}$ представления инфона $\underline{\sigma}_1$ существует такой параметр $\dot{c}_{k'} : T_{k'}$, который ни в $\underline{\sigma}_1$, ни в $\underline{\sigma}_2$, ни не равняется другому параметру $\dot{c}_{k''}$ другого места $s_{k''}$ ($k' \neq k''$) так, что для представления инфона $\underline{\sigma}'_1$, которое возникает, когда в $\underline{\sigma}_1$ назначают неопределенные места $s_{k'}$ соответствующих параметров $\dot{c}_{k'}$, существует представление инфона $\underline{\sigma}'_2$, выполняющее условие

$$\langle \underline{\sigma}'_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}'_2, \mathbb{I}_2 \rangle \tag{2.37}$$

которое возникает, когда в $\underline{\sigma}_2$ назначают неопределенные места $s'_{j'}$ тех же параметров $\dot{c}_{k'}$, причем верно $s'_{j'} : T'_{j'}$ и

$$\{\, \mathbb{I}^I(a) \mid a : T'_{j'} \,\} = \{\, \mathbb{I}^I(b) \mid b : T_{k'} \,\},$$

если $\dot{c}_{k'}$ назначается на место $s'_{j'}$.

Это обозначается $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle$. $\diamondsuit$

Пример 2.31. Рассмотрим представления инфонов

$$\langle\!\langle \mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle$$

и

$$\langle\!\langle \mathrm{unter}, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle$$

примерного мира (пример 2.20). Из примера 2.26 и главы 2.2 имеем:

$$\mathbb{I}^I(w_1) = w_1, \mathbb{I}^I(w_2) = w_2, \mathbb{I}^R(\mathrm{auf}) = \pi\big(\mathbb{I}^R(\mathrm{unter})\big)$$

и

$$\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle\big) = \\ = \pi\Big(\mathbb{I}^T\big(\langle\!\langle \mathrm{unter}, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle\big)\Big)$$

с перестановкой π, для которой верно $\pi(2) = 1$ и $\pi(1) = 2$. При этом выполняется следующее условие

$$\langle \langle\!\langle \mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \\ \approx \langle \langle\!\langle \mathrm{unter}, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t', 1 \rangle\!\rangle, \mathbb{I}_2 \rangle.$$

Вывод 2.32. *Пункт 3 определения 2.30 заключает в себе, что содержания информаций являются также не эквивалентными, если два множества данных отображаются в одно и то же множество, но обозначают разные его части.*

Вывод 2.33. *Пусть* Σ_1 *и* Σ_2 *— две сигнатуры,* $w = (W, F)$ *— мир, а также*

$$\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle = \langle \langle\!\langle R_1, s_1^1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n^1 \rightsquigarrow a_n, t_1, i_1 \rangle\!\rangle, (\mathbb{I}_1^I, \mathbb{I}_1^R, \mathbb{I}_1^T) \rangle$$

и

$$\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle = \langle \langle\!\langle R_2, s_1^2 \rightsquigarrow b_1, \ldots, s_n^2 \rightsquigarrow b_n, t_2, i_2 \rangle\!\rangle, (\mathbb{I}_2^I, \mathbb{I}_2^R, \mathbb{I}_2^T) \rangle$$

— два содержания информаций этих сигнатур.

Если $\underline{\sigma}_1$ *и* $\underline{\sigma}_2$ *— два параметрических представления инфонов, то для каждого представления инфона* $\underline{\sigma}'_1$*, которое возникает при назначении параметров* $\dot{a}_k$ *из* $\underline{\sigma}_1$ *индивидуумами* a_k *соответствующих типов* T_k^1*, существует соответствующее назначение для параметров* $\dot{b}_j$ *индивидуумами типов* T_j^2 *представления инфона* $\underline{\sigma}_2$*. Если возникающие при этом представление обозначается* $\underline{\sigma}'_2$*, то здесь „соответствующий“ имеет значение:*

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}'_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}'_2)\big), \tag{2.38}$$

где π *является перестановкой, приведенной в определении 2.30 (стр. 42).*

Доказательство. Пусть $\dot{a}_k = \dot{b}_j$, причем $\dot{a}_k$ и $\dot{b}_j$ в результате интерпретации присоединяются к одному и тому же месту (сравни с определением 2.30, пункт 3, стр. 43), то верно

$$\{\, \mathbb{I}_1^I(a) \mid a \in D_{T_k^1} \,\} = \{\, \mathbb{I}_2^I(b) \mid b \in D_{T_j^2} \,\}.$$

Пусть $a_k \in D_{T_k^1}$. Тогда существует $b_j \in D_{T_j^1}$ с $\mathbb{I}_1^I(a_k) = \mathbb{I}_2^I(b_j)$. При этом следует для двух представлений инфонов $\underline{\sigma}'_1$ и $\underline{\sigma}'_2$, которые возникают при замене параметра $\dot{a}_k$ через a_k и параметра $\dot{b}_j$ через b_j:

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}'_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^I(\underline{\sigma}'_2)\big).$$

Это можно продолжить для каждого места, назначенного параметром. $\square$

Лемма 2.34. *Пусть* Σ_1 *и* Σ_2 *— две сигнатуры,* $w = (W, F)$ *мир,* $\mathbb{I}_1$ *и* $\mathbb{I}_2$ *подходящие интерпретации, и* $\underline{\sigma}_1$ *и* $\underline{\sigma}_2$ *— два непараметрических представления инфонов сигнатур* Σ_1 *и* Σ_2*.*

Из $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle$ *следует для всех ситуаций* $s \in \mathfrak{S}$*, что:*

$$s \models \langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \text{ тогда и только тогда, когда } s \models \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle. \tag{2.39}$$

Доказательство. Пусть

$$\langle \langle\!\langle R_1, s_1^1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n^1 \rightsquigarrow a_n, t_1, i_1 \rangle\!\rangle, (\mathbb{I}_1^I, \mathbb{I}_1^R, \mathbb{I}_1^T) \rangle \approx \\ \approx \langle \langle\!\langle R_2, s_1^2 \rightsquigarrow b_1, \ldots, s_n^2 \rightsquigarrow b_n, t_2, i_2 \rangle\!\rangle, (\mathbb{I}_2^I, \mathbb{I}_2^R, \mathbb{I}_2^T) \rangle.$$

То существует такая перестановка π относительно определения 2.30 (стр. 42) так, что выполняется следующие условия:

Для $i_1 = i_2$: Верно $\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)$ и $\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big)$. Следовательно:

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) \in \mathbb{I}_1^R(R_1) \text{ тогда и только тогда, когда } \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) \in \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big).$$

При

$$\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2) \in \mathbb{I}_2^R(R_2) \text{ тогда и только тогда, когда } \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) \in \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)$$

следует эквивалентность для условия (2.30) пункта 1 определения 2.27 (стр. 41) для представлений инфонов $\underline{\sigma}_1$ и $\underline{\sigma}_2$.

Для $i_1 = 1 - i_2$: Верно $\mathbb{I}_1^R(R_1) = \Big(\pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)\Big)^{\mathsf{C}}$ и $\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big)$. Следовательно:

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) \in \mathbb{I}_1^R(R_1) \text{ тогда и только тогда, когда } \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) \notin \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big).$$

При

$$\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2) \in \mathbb{I}_2^R(R_2) \text{ тогда и только тогда, когда } \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) \in \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)$$

следует эквивалентность для условия (2.30) пункта 1 определения 2.27 (стр. 41) для обеих представлений $\underline{\sigma}_1$ и $\underline{\sigma}_2$.

Рассмотрим пункт 2 и уравнение (2.31) определения 2.27 (стр. 41). В обоих, выше рассмотренных случаях верно

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big).$$

Уравнение (2.31) инвариантно относительно перестановки π. Оно либо выполняется и для $\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1)$ и для $\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)$, либо не выполняется ни для одного из этих двух туплетов. Пусть

$$M_1 = \{\, x_k^j \mid j \in \{\, 1, \ldots, m \,\}, k \in \{\, 0, \ldots, k_j \,\} \,\},$$

где все компоненты определены для $\underline{\sigma}_1$ как в (2.27). Множество M_2 определяется аналогичным образом для $\underline{\sigma}_2$. То множества M_1 и M_2 являются идентичными. При этом высказывания $M_1 \cap W \subseteq W_s$ и $M_2 \cap W \subseteq W_s$ являются равноценными.

Значит, все высказывания, приведенные в определении 2.27 (стр. 41), являются эквивалентными для обоих представлений инфонов. Из этого следует верность леммы 2.34 для насыщенных представлений инфонов.

Если представлений инфонов $\underline{\sigma}_1$ и $\underline{\sigma}_2$ — ненасыщенны, то верно, что $i_1 = i_2$ и существуют такие параметрические представления инфонов $\underline{\sigma}'_1$ и $\underline{\sigma}'_2$ относительно определения 2.30, пункт 4 (стр. 42), при которых выполняется условие

$$\langle \underline{\sigma}'_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}'_2, \mathbb{I}_2 \rangle.$$

Из вывода 2.33 следует, что для каждого назначения параметров из $\underline{\sigma}'_1$ значениями соответствующих типов существует такое назначение параметров из $\underline{\sigma}'_2$, что результирующие содержания информации являются эквивалентными. Следовательно, относительное верно также в обратном случае. При этом следует высказывание леммы 2.34 из определения 2.27 (стр. 41). □

Вывод 2.35. *Пусть Σ_1 и Σ_2 — две сигнатуры и $w = (W, F)$ — мир.*

Тогда верно для двух содержания информаций $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle$ и $\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle$ этих сигнатур:

$$\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle \text{ тогда и только тогда, когда } \langle \overline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \overline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle. \tag{2.40}$$

Доказательство. Рассмотрим определение 2.30 (стр. 42), то условия 2 и 3 являются независимыми от полярности. Составление двойственного представления инфона не влияет на них. Остается показать эквивалентность для условий 1 и 4.

Сначала обратим внимание на насыщенные представления инфонов. Пусть i_1 и i_2 — полярности представлений $\underline{\sigma}_1$ и $\underline{\sigma}_2$ и $i_1 = i_2$. Тогда оба содержания информаций являются эквивалентными тогда и только тогда, когда существует такая перестановка π относительно определения 2.30 (стр. 42), что верно $\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big)$. Также имеем

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \mathbb{I}_1^T(\overline{\sigma}_1) \text{ и } \mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2) = \mathbb{I}_2^T(\overline{\sigma}_2). \tag{2.41}$$

Следовательно, $\mathbb{I}_1^T(\overline{\sigma}_1) = \mathbb{I}_2^T(\overline{\sigma}_2)$. Из этого следует высказывание вывода при $1 - i_1 = 1 - i_2$.

Пусть сейчас $i_1 = 1 - i_2$. Тогда оба содержания информации являются эквивалентными тогда и только тогда, когда существует такая перестановка, при которой выполняется

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \Big(\pi\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big)\Big)^{\mathsf{C}}.$$

Здесь при (2.41) верно

$$\mathbb{I}_1^T(\overline{\underline{\sigma}}_1) = \Big(\pi\big(\mathbb{I}_2^T(\overline{\underline{\sigma}}_2)\big)\Big)^{\mathsf{C}}.$$

При этом здесь тоже следует высказывание при $1 - i_1 = i_2$.

Для ненасыщенных представлений инфонов верно $i_1 = i_2$ при выполнении условия 4 определения 2.30. Все остальные структурные свойства представлений не меняются. Из этого и согласно вышнему частью доказательства следует высказывание.

В узком смысле выше было показано только одно направление доказательства. Другое вытекает аналогичным образом из ранее доказанного на основе вывода 2.24 (стр. 37). □

Теорема 2.36. *Пусть* $\{\,\Sigma_j \mid \Sigma_j = (\mathfrak{G}_j, \mathfrak{R}_j), j \in J\,\}$ *— множество сигнатур,* $w = (W, F)$ *— мир и* $\{\,\mathbb{I}_j \mid j \in J\,\}$ *— множество интерпретаций сигнатур и мира.*

То соотношение $\approx$ *является соотношением эквивалентности на множестве содержаний информаций, которые можно составлять с помощью сигнатур* Σ_j *и интерпретаций* $\mathbb{I}_j$.

Доказательство. Как и для каждого отношения эквивалентности здесь надо показать наличие симметрии, транзитивности и рефлексивности. Рассмотрим для начала непараметрические представления инфонов.

Рефлексивность. Рассмотрим $\underline{\sigma}_1 = \underline{\sigma}_2$ и $\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2$. Если использовать идентичность Id вместо перестановки π, то получим в определении 2.30 (стр. 42):

$$R_1 = R_2,\ a_j = b_j \text{ für } j \in \{\,1, \ldots, m\,\},\ \mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 \text{ и } i_1 = i_2.$$

При этом пункты 1, 2 и 3 верны. Для пункта 4 также можно найти эквивалентное назначение. Следовательно верно

$$\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle.$$

Симметрия. Пусть $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle$. Тогда при обозначении относительно определения 2.30 (стр. 42) существует перестановка π, которая выполняет одно из уравнений

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big) \text{ или } \mathbb{I}_1^R(R_1) = \Big(\pi\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)\Big)^{\mathsf{C}}.$$

Так как перестановки — биективные отображения, то существует также такая перестановка π^{-1}, что в случае $i_1 = i_2$ верно:

$$\pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big) = \mathbb{I}_2^R(R_2) \text{ и } \pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1)\big) = \mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2).$$

Для $i_1 = 1 - i_2$ следует:

$$\pi^{-1}\Big(\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big)^{\mathsf{C}}\Big) = \mathbb{I}_2^R(R_2) \text{ и } \pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1)\big) = \mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2).$$

Пусть сейчас:

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) \subseteq M_1 \times \cdots \times M_m.$$

Эта структура имеет место при выполнении условия (2.24). Тогда имеем

$$\pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big) \subseteq M_{\pi^{-1}(1)} \times \cdots \times M_{\pi^{-1}(m)} = \pi^{-1}(M_1 \times \cdots \times M_m).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\Big(\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big)^{\mathsf{C}}\Big) &= \pi^{-1}\big(M_1 \times \cdots \times M_m \setminus \mathbb{I}_1^R(R_1)\big)\\ &= \big(M_{\pi^{-1}(1)} \times \cdots \times M_{\pi^{-1}(m)}\big) \setminus \pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big)\\ &= \Big(\pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big)\Big)^{\mathsf{C}}.\end{aligned} \tag{2.42}$$

При этом верно

$$\Big(\pi^{-1}\big(\mathbb{I}_1^R(R_1)\big)\Big)^{\mathsf{C}} = \mathbb{I}_2^R(R_2)$$

для $i_1 = 1 - i_2$.

При этом симметрия показана для пунктов 1 и 2 определения 2.30 (стр. 42). Пункт 3 составлен симметрично, так что для него свойство симметрии также верно. Для пункта 4 симметрия вытекает из симметрии других пунктов, так как возможно использовать то же назначение параметрами неопределенных мест.

Итак, из $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1\rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2\rangle$ следует и $\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2\rangle \approx \langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1\rangle$.

Транзитивность. Пусть $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1\rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2\rangle$ и $\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2\rangle \approx \langle \underline{\sigma}_3, \mathbb{I}_3\rangle$. То существуют такие перестановки π_1 и π_2, что для каждого из следующих восьми возможных случаев верно:

$i_1 = i_2 = i_3$:

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi_1\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big) = \pi_1\Big(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)\Big).$$

Это равенство получается при замене терма $\mathbb{I}_2^R(R_2)$ равноценным термом $\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)$. Сцепление двух перестановок является перестановкой. Итак, получается при $\pi_3 = \pi_1 \circ \pi_2$

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi_3\big(\mathbb{I}_3^R(_3)\big) \text{ и аналогично этому } \mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi_3\big(\mathbb{I}_3^T(\underline{\sigma}_3)\big),$$

так как

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi_1\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) = \pi_1\Big(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^T(\underline{\sigma}_3)\big)\Big).$$

$i_1 = i_2 = 1 - i_3$: Значит верно $i_1 = 1 - i_3$. Тогда

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \pi_1\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big) = \pi_1\left(\Big(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)\Big)^{\mathsf{C}}\right).$$

При этом согласно (2.42)

$$\mathbb{I}_1^R(R_1) = \left(\pi_1\Big(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)\Big)\right)^{\mathsf{C}} = \Big(\pi_3\big(\mathbb{I}^R(R_3)\big)\Big)^{\mathsf{C}}$$

для $\pi_3 = \pi_1 \circ \pi_2$.

$i_1 = 1 - i_2 = i_3$: Здесь $i_1 = i_3$. При использовании, между прочим, равенства (2.42) получается

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_1^R(R_1) &= \Big(\pi_1\big(\mathbb{I}_2^R(R_2)\big)\Big)^{\mathsf{C}} \\
&= \left(\pi_1\left(\Big(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)\Big)^{\mathsf{C}}\right)\right)^{\mathsf{C}} \\
&= \left(\left(\pi_1\Big(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big)\Big)\right)^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}} \\
&= \pi_3\big(\mathbb{I}_3^R(R_3)\big).
\end{aligned}$$

$1 - i_1 = i_2 = i_3$: При изменении нумерации можно объяснять этот случай на примере с $i_1 = i_2 = 1 - i_3$. Это возможно, так как мы уже показывали симметрию для $\mathbb{I}^R(R)$.

$1 - i_1 = 1 - i_2 = i_3$: Этот случай соответствует $i_1 = i_2 = 1 - i_3$.

$1 - i_1 = i_2 = 1 - i_3$: Этот случай соответствует $i_1 = 1 - i_2 = i_3$.

$i_1 = 1 - i_2 = 1 - i_3$: Этот случай соответствует $1 - i_1 = i_2 = i_3$.

$1 - i_1 = 1 - i_2 = 1 - i_3$: Этот случай соответствует $i_1 = i_2 = i_3$.

Для интерпретации туплетов верно:

$$\mathbb{I}_1^T(\underline{\sigma}_1) = \pi_1\big(\mathbb{I}_2^T(\underline{\sigma}_2)\big) = \pi_1\Big(\pi_2\big(\mathbb{I}_3^T(\underline{\sigma}_3)\big)\Big) = \pi_3\big(\mathbb{I}_3^T(\underline{\sigma}_3)\big).$$

При этом можно показать транзитивность для непараметрических, насыщенных представлений инфонов.

Пусть сейчас $\dot{a}_k$, $\dot{b}_j$ и $\dot{c}_l$ — три параметра представлений инфонов $\underline{\sigma}_1$, $\underline{\sigma}_2$ и $\underline{\sigma}_3$, которые при интерпретации присоединены к одному и тому же месту. Пусть они являются параметрами типов $\dot{a}_k \in D_{T_k^1}$, $\dot{b}_j \in D_{:T_j^2}$ и $\dot{c}_l \in D_{T_l^3}$. Тогда для интерпретации этих типов верно:

$$\{\, \mathbb{I}_1^I(a) \mid a \in D_{T_k^1} \,\} = \{\, \mathbb{I}_2^I(b) \mid b \in D_{T_j^2} \,\} = \{\, \mathbb{I}_3^I(c) \mid c \in D_{T_l^3} \,\}.$$

Также верно: $\dot{a}_k = \dot{b}_j = \dot{c}_l$.

Из транзитивности тождества следует:

$$\{\, \mathbb{I}_1^I(a) \mid a \in D_{T_k^1} \,\} = \{\, \mathbb{I}_3^I(c) \mid c \in D_{T_l^1} \,\} \text{ и } \dot{a}_k = \dot{c}_l.$$

Итак, транзитивность также имеет место для параметрических, насыщенных представлений инфонов.

Перейдем к ненасыщенным представлениям инфонов. Верным является,

$$i_1 = i_2 = i_3.$$

Далее, для каждого неопределенного места s_j^1 представления $\underline{\sigma}_1$ существуют такой параметр $\dot{c}_j$ соответствующего типа и для неопределенных мест s_l^3 представления $\underline{\sigma}_3$ такие параметры $\dot{d}_l$ соответствующих типов, что при назначении параметров на неопределенные места представлений инфонов, возникают представления $\underline{\sigma}_1'$, $\underline{\sigma}_2'$, $\underline{\sigma}_2''$ и $\underline{\sigma}_3'$. При этом составляются параметрами $\dot{c}_j$ такие представления $\underline{\sigma}_1'$ и $\underline{\sigma}_2'$ и параметрами $\dot{d}_l$ представления $\underline{\sigma}_2''$ и $\underline{\sigma}_3'$, что выполняется условие

$$\langle \underline{\sigma}_1', \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2', \mathbb{I}_2 \rangle \text{ и } \langle \underline{\sigma}_2'', \mathbb{I}_2 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_3', \mathbb{I}_3 \rangle.$$

Пусть параметры $\dot{d}_l$ — парно разные, как это и требуется, согласно определению 2.30 (учитывая, что это возможно). Если $\dot{c}_j$ и $\dot{d}_l$ присоединить к одному и тому же месту $s_k^{2'}$ в $\underline{\sigma}_2''$ и $\underline{\sigma}_2'$, то они имеют один и тот же тип, как $s_j^{1'}$ и $s_l^{3'}$. Это следует из того же самого определения. Следовательно, представление инфона $\underline{\sigma}_3''$, которое возникает, когда параметры $\dot{d}_l$ заменяются в $\underline{\sigma}_3'$ соответствующими параметрами $\dot{c}_j$ (как это описано выше), выполняет условия названного определения и является верным:

$$\langle \underline{\sigma}_1', \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_2', \mathbb{I}_2 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_3'', \mathbb{I}_3 \rangle,$$

так как $\underline{\sigma}_2'$ возникает из $\underline{\sigma}_2''$ при схожем обмене. С учетом показанной выше транзитивности эквивалентности параметрических представлений инфонов следует:

$$\langle \underline{\sigma}_1', \mathbb{I}_1 \rangle \approx \langle \underline{\sigma}_3'', \mathbb{I}_3 \rangle.$$

При этом было возможно также показать транзитивность относительно условия 4 определения 2.30.

При доказательстве рефлексивности, симметрии и транзитивности показано также, что эквивалентность $\approx$ содержания информации действительно является соотношением эквивалентности. □

Определение 2.37. Пусть $\{ \Sigma_j \mid \Sigma_j = (\mathfrak{G}_j, \mathfrak{R}_j), j \in J \}$ — множество сигнатур, $w = (W, F)$ — мир и $\{ \mathbb{I}_j \mid j \in J \}$ — множество интерпретаций сигнатур.

Смежный класс содержания информации

$$\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle = \langle (\!(R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_1 \rightsquigarrow a_n, Zeit \rightsquigarrow t, i)\!), \mathbb{I} \rangle$$

относительно эквивалентности называется *основным инфоном*. Для него используют нотацию

$$\sigma = [\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle]_\approx = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, Zeit \rightsquigarrow t, i \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}. \quad (2.43)$$

Аналогично двойственного представления инфона, $\overline{\sigma} = [\langle \overline{\underline{\sigma}}, \mathbb{I} \rangle]_\approx$ называется *двойственным инфоном* инфона σ.

Ситуация s *поддерживает* инфон σ, если существует такое содержание информации $\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$ в σ, для которого верно $s \vDash \langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle$. Это обозначается — *инфоническим высказыванием* $s \vDash \sigma$.

Инфон σ называется *фактом*, если существует такая реальная ситуация так, при которой выполняется условие $s \vDash \sigma$.

Множество всех инфонов обозначается $\mathfrak{I}$. ◊

Вывод 2.38. *Для двух представлений информации* $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle$ *и* $\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_2 \rangle$, *которые выполняют условие*

$$[\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle]_\approx = [\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle]_\approx,$$

верны следующие условия:

$$\mathrm{Act}(\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle) = \mathrm{Act}(\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle) \ \text{и} \ \mathrm{Obj}(\langle \underline{\sigma}_1, \mathbb{I}_1 \rangle) = \mathrm{Obj}(\langle \underline{\sigma}_2, \mathbb{I}_2 \rangle).$$

Доказательство. Оба представления информаций являются эквивалентными. При этом следует утверждение, согласно пункту 2 определении 2.30 (стр. 42) и определения 2.27 (стр. 41). □

Замечание 2.39. Инфон характеризуется в основном туплетом отношения в мире. Согласно этому при выводе 2.38 можно — что мы и делаем — передавать операторы $\mathrm{Act}(\langle\underline{\sigma}, \mathbb{I}\rangle)$ и $\mathrm{Obj}(\langle\underline{\sigma}, \mathbb{I}\rangle)$ инфону σ.

Замечание 2.40. В последующем будем исходить также иногда из фиксированной сигнатуры и фиксированной интерпретации. Так как они в том контексте ясны, запишем уравнение (2.43) в виде

$$\sigma = \langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, t, i \rangle\!\rangle. \tag{2.45}$$

Замечание 2.41. Реальные ситуации могут быть в зависимости от мира весьма комплексными. При этом они могут иногда поддерживать несчетное число инфонов. Часто теоретик или актер может распоряжаться только маленькой частью информации о ситуации. Это следует часто из ограниченной сигнатуры. Иногда говорят например, что человек может эффективно разрабатывать только конечное число информации. Работа с бесконечными классами объясняется делением на конечное число множеств/классов. В этом отношении разработка информации работает в меньшей степени с ситуациями, и в большей степени с типами ситуаций, как они описаны в разделе 2.4.1 на странице 59.

Пример 2.42. Из содержания информации примера 2.29 (стр. 42) можно построить инфоны. Соответствующие инфонические высказывания представлены в таблице 2.7 (стр. 54). Потому что нами используется только одна интерпретация $\mathbb{I}$ (из примера 2.26, стр. 39), нет необходимости в ее написании.

2.3.3 Реальные и абстрактные ситуации

Определение 2.43. Каждое множество $I \subseteq \mathfrak{I}$ инфонов называется *абстрактной ситуацией*.

Если s — реальная ситуация, то абстрактная ситуация

$$I = \{\, \sigma \mid s \vDash \sigma \,\} = {\vDash}(s) \tag{2.46}$$

называется *абстрактной ситуацией реальной ситуации s.* ♢

$$
\begin{aligned}
&s_1 \models \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_1, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_2, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}W, w_3, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, p, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{ist\_vom\_Typ\_}P, w_1, 0 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 0 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_2, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_3, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{neben}, \mathit{Objekt}_1 \rightsquigarrow w_2, \mathit{Objekt}_2 \rightsquigarrow w_3, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{zwischen}, \mathit{außen}_1 \rightsquigarrow w_1, \mathit{Mitte} \rightsquigarrow w_2, \mathit{außen}_2 \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \text{oberhalb}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow p, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle,
\end{aligned}
$$

Таблица 2.7: Инфоны, поддержанные ситуацией s_1

Теорема 2.44. *Пусть* $\{\, \Sigma_j \mid \Sigma_j = (\mathfrak{G}_j, \mathfrak{R}_j), j \in J \,\}$ *— множество сигнатур,* $w = (W, F)$ *— мир и* $\{\, \mathbb{I}_j \mid j \in J \,\}$ *— множество интерпретации сигнатур. Тогда для поддержанных инфонов ситуаций* s_1 *и* s_2 *из* $s_1 \subseteq s_2$ *следует*

$$\models(s_1) \subseteq \models(s_2). \tag{2.47}$$

Если для каждого туплета

$$\mathsf{t} = \Big(\big(x_0^1, w_{x_0^1}^{e_1^1}(t), \ldots, w_{x_0^1}^{e_{k_1}^1}(t)\big), \ldots, \big(x_0^m, w_{x_0^m}^{e_1^m}(t), \ldots, w_{x_0^m}^{e_{k_m}^m}(t)\big), t \Big)$$

мира существует инфон $\sigma = [\langle \underline{\sigma}, \mathbb{I} \rangle]_{\approx}$*, для которого выполняется* $\mathsf{t} = \mathbb{I}^T(\underline{\sigma})$*, то* (2.47) *является не только необходимым, но также и достаточным для* $s_1 \subseteq s_2$*.*

Доказательство. Пусть $s_1 = (W_{s_1}, F_{s_1})$ и $s_2 = (W_{s_2}, F_{s_2})$.

Из $s_1 \subseteq s_2$ **следует** $\models(s_1) \subseteq \models(s_2)$**:** Для каждой интерпретации $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$ и для каждого инфона $\sigma = \langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, i \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$ следует из $s_1 \models \sigma$ и определения 2.27 (стр. 41)

$$\{\, \mathbb{I}^I(a_1), \ldots, \mathbb{I}^I(a_n) \,\} \cap W \subseteq W_{s_1}.$$

Интерпретация $\mathbb{I}^R(R)$ зависит только от мира, но не от ситуации, следовательно $\mathbb{I}^R(R)$ равна для ситуаций s_1 и s_2. Из определения 2.8 (стр. 26) следует

$$\{\,\mathbb{I}^I(a_1),\dots,\mathbb{I}^I(a_n)\,\}\cap W\subseteq W_{s_2}.$$

Также для каждого $t\in T$ и каждого

$$x\in\{\,\mathbb{I}^I(a_1),\dots,\mathbb{I}^I(a_n)\,\}\cap W$$

из существования значения частичной линии мира $w^x_{s_1}(t)$ объекта x в s_1 следует равенство частичной линии мира $w^{s_2}_x(t)$ объекта x в s_2. При этом следует

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^T(\sigma)=\mathbb{I}^T(\underline{\sigma}) &= \Big(\big(x^1_0, w^{e^1_1}_{x^1_0}(t)|_{T^1_{x^1_0}},\dots,w^{e^1_{k_1}}_{x^1_0}(t)|_{T^1_{x^1_0}}\big),\dots\\ &\qquad\dots,\big(x^m_0, w^{e^m_1}_{x^m_0}(t)|_{T^1_{x^m_0}},\dots,w^{e^m_{k_m}}_{x^m_0}(t)|_{T^1_{x^m_0}}\big),t\Big)\\ &= \Big(\big(x^1_0, w^{e^1_1}_{x^1_0}(t)|_{T^2_{x^1_0}},\dots,w^{e^1_{k_1}}_{x^1_0}(t)|_{T^2_{x^1_0}}\big),\dots\\ &\qquad\dots,\big(x^m_0, w^{e^m_1}_{x^m_0}(t)|_{T^2_{x^m_0}},\dots,w^{e^m_{k_m}}_{x^m_0}(t)|_{T^2_{x^m_0}}\big),t\Big),\end{aligned}\tag{2.48}$$

так как для всех объектов $x\in W_{s_1}$ верно $T^1_x\subseteq T^2_x$. А при этом следует $s_2\vDash\sigma$.

Из $\vDash(s_1)\subseteq\vDash(s_2)$ **следует** $s_1\subseteq s_2$**:** Доказательство представим в косвенном виде. Пусть $s_1\not\subseteq s_2$.

В этом случае существуют такой объект $x\in W_{s_1}$ и такая точка времени $t_1\in T$, что хотя $w^{s_1}_x(t)|_{T_x}\in F_{s_1}$ является определенной во времени t_1, не верно $w^{s_2}_x(t)|_{T_x}\in F_{s_2}$. Тогда существуют такая сигнатура Σ и такая интерпретация $\mathbb{I}=(\mathbb{I}^I,\mathbb{I}^R,\mathbb{I}^T)$, что выполняется условие $s_1\vDash\sigma$ для инфона $\sigma=\langle\!\langle R,a_1,a_2,t_1,1\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$, для которого верно

$$\Big(\big(x,w^e_x(t_1)\big),t_1\Big)\in\mathbb{I}^R(R),$$

для любой свойственной функции $w^e_x(t)$ частичной линии мира $w^{s_1}_x(t)$, которая является определенной для t_0, $\mathbb{I}^I(a_1)=x$, $\mathbb{I}^I(a_2)=w^e_x(t)$ и

$$\mathbb{I}^T\langle\!\langle R,a_1,a_2,t,1\rangle\!\rangle=\Big(\big(\mathbb{I}^I(a_1),\mathbb{I}^I(a_2)\big),\mathbb{I}^I(t)\Big).$$

При этом верно $s_2\nvDash\sigma$, что значит $\vDash(s_1)\not\subseteq\vDash(s_2)$.

Итак, $s_1\subseteq s_2$ при условии, что $\vDash(s_1)\subseteq\vDash(s_2)$. $\square$

Замечание 2.45. Теорема 2.44 имеет сильную предпосылку. Но она — не невыполнима. Возьмем, например, сигнатуру, в множестве индивидуумов которой точно содержатся те объекты и значения свойств мира, и в множестве отношений которой точное множество отношений мира, туплеты которых выполняют условие (2.31). То эта сигнатура вместе с идентичной интерпретацией выполняют предпосылку данной теоремы.

При этом существует теоретическая возможность различать две разные ситуации при помощи поддержанных ими инфонов.

Замечание 2.46. Так как ситуации, как и мир, определены объектами, и отношение подситуации базируется на объект-время-подмножество-отношении, следует также отношение подпространств районов объектов. В частности это верно, если использовать пространственные районы, чтобы определить ситуации (как это и делают в повседневной жизни).

Замечание 2.47. Для любого инфона верно:

$$\text{Из } s_1 \models \sigma \text{ и } s_1 \subseteq s_2 \text{ следует: } s_2 \models \sigma. \tag{2.49}$$

Это свойство называется *персистенцией*. В связи с тем, что это свойство вытекает из теоремы 2.44 (стр. 54), то играть большой роли оно здесь не будет.

Пример 2.48. В разделе 2.2 (со страницы 29) были определенны две ситуации s_1 и s_2. Если бы мы имели относительные указания места „auf“ (на), „unter“ (под), „neben“ (рядом с) и так далее в инфонах с отношениями без указания времени, то получили бы следующие высказывания

$$\begin{aligned}
&s_1 \models \langle\!\langle \mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, 1 \rangle\!\rangle,\\
&s_1 \models \langle\!\langle \mathrm{auf}, w_1, w_3, 0 \rangle\!\rangle,\\
&s_2 \models \langle\!\langle \mathrm{auf}, w_1, w_2, 0 \rangle\!\rangle \text{ и}\\
&s_2 \models \langle\!\langle \mathrm{auf}, w_1, w_3, 1 \rangle\!\rangle.
\end{aligned}$$

Но наши ситуации s_1 и s_2 являются обе ситуациями нашего мира w. При этом обязательно выполнение условия $s_1 \in \mathfrak{S}$ и $s_2 \in \mathfrak{S}$. Следовательно, все четыре инфона поддержаны миром, причем мир становится противоречивым. Так как наш мир по определению — непротиворечивый, то эти инфоны не могут быть персистентными. Это противоречит намерению структурировать мир с помощью ситуации, так как описывать эту структуру инфонами невозможно.

Для реставрации персистенции необходимо, разграничить инфоны обеих ситуаций. Это здесь осуществится при помощи временных локализаций t_0 и t_1.

Пространственная локализация здесь не обязательна, так как объекты здесь единозначно локализированы в пространстве. При этом дана имплицитная пространственная локализация. Вместо описанных выше противоречивых информаций, лучше записывают:

$$\begin{aligned}
&s_1 \models \langle\!\langle \mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow t_0, 1 \rangle\!\rangle, \\
&s_1 \models \langle\!\langle \mathrm{auf}, w_1, w_3, t_0, 0 \rangle\!\rangle, \\
&s_2 \models \langle\!\langle \mathrm{auf}, w_1, w_2, t_1, 0 \rangle\!\rangle \text{ и} \\
&s_2 \models \langle\!\langle \mathrm{auf}, w_1, w_3, t_1, 1 \rangle\!\rangle.
\end{aligned}$$

Сейчас, когда мы определили время, как часть отношений, мы снова можем опустить ее относительно замечания 2.21 (стр. 36), если мы хотим работать далее с неопределенными указаниями времени. Это же позволяет нам и определение 2.27 (стр. 41).

Определение 2.49. Абстрактная ситуация I называется *когерентной*, если выполняются следующие условия:

1. Для каждого инфона $\sigma \in I$ верно: $\overline{\sigma} \notin I$.

2. Из $\langle\!\langle „=“, a, b, 1 \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}} \in I$ с интерпретацией отношения „=“ как идентичность Id следует для интерпретации индивидуумов $\mathbb{I}^I(a) = \mathbb{I}^I(b)$.

3. Не существует ни одного индивидуума a так, что при интерпретации любого отношения „=“ как идентичность Id верно $\langle\!\langle „=“, a, a, 0 \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}} \in I$. ◊

Основная роль абстрактных ситуаций — иметь возможность работать с нереальными — то есть неактуальными и неправильными — информациями.

Определение 2.50. Две абстрактных ситуации I и I' называются *совместимыми*, если их объединение $I \cup I'$ является когерентным. ◊

Лемма 2.51. *Пусть* $\mathfrak{I}_{\mathrm{co}}$ *— подмножество всех когерентных абстрактных ситуаций из* $\mathfrak{I}$. *Тогда* $(\mathfrak{I}_{\mathrm{co}}, \subseteq)$ *является структурой информаций.*

Доказательство. Пустая абстрактная ситуация $I = \emptyset$ при определении является когерентной, и каждое подмножество I' когерентной абстрактной ситуации также является когерентной. При этом следует утвержденное свойство относительно пересечения и объединения. □

Замечание 2.52. Отношение консистентности, которое требуется в альтернативном определении (см. например Hebisch 1991), соответствует совместительством. Выполняется:

$$I \sim I' \text{ тогда и только тогда, когда } I \text{ — совместимая к } I'. \tag{2.50}$$

Определение 2.53. Абстрактная ситуация I называется *актуальной*, если верно:

$$I \subseteq \models(w), \tag{2.51}$$

то есть, если I — множество фактов. $\diamondsuit$

Вывод 2.54. *Абстрактная ситуация I является актуальной тогда и только тогда, когда для каждого инфона $\sigma \in I$ существует такая реальная ситуация s, что верно*

$$s \models \sigma. \tag{2.52}$$

Следовательно, каждая абстрактная ситуация реальной ситуации является актуальной.

Доказательство. Верно согласно теореме 2.44 (стр. 54) для каждой ситуации $s \in \mathfrak{S}$:

$$\models(s) \subseteq \models(w),$$

если согласно выводу 2.5 и замечанию 2.6 (стр. 25) рассматривать мир, как ситуацию. При этом из $s \models \sigma$ следует, что $w \models \sigma$. Другое направление уже показано при том, что возможно рассматривать мир как ситуацию. $\square$

Вывод 2.55. *Каждая актуальная абстрактная ситуация является когерентной.*

Доказательство. Надо доказать условия определения 2.49 (стр. 57). Пусть I — актуальная ситуация.

1. Из $\sigma \in I$ следует, что $w \models \sigma$. Если верным было бы, что $\overline{\sigma} \in I$, то тогда было бы верно $w \models \overline{\sigma}$, что согласно пункт 1 определения 2.27 (стр. 41) не возможно. Следовательно пункт 1 определения 2.49 — выполнен.

2. Из $\langle\!\langle „=“, a, b, 1 \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}} \in I$ следует при актуальности абстрактной ситуации I, что $w \models \langle\!\langle „=“, a, b, 1 \rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$. Так как $\mathbb{I}^R(„=“) = Id$ верно, то следовательно в мире будет выполняться условие $\mathbb{I}^I(a) = \mathbb{I}^I(b)$. Пункт 2 подходит при этом также и для „=“.

3. Для каждого отношения „=“, которое интерпретируется как идентичность, и для каждого индивидуума верно: $\mathbb{I}^I(a) = \mathbb{I}^I(a)$. Следовательно, $w \models \langle\!\langle „=“, a, a, 1\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$, а при этом $w \not\models \langle\!\langle „=“, a, a, 0\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$. Следовательно $\langle\!\langle „=“, a, a, 0\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$ также не может быть в множестве I. Но это является именно требованием пункта 3 определения 2.49.

Последние два пункта верны для каждого отношения, которое интерпретируется как идентичность. При этом следует высказывание. □

2.4 Составные инфоны

2.4.1 Типы и параметры

Определение 2.56. Пусть Σ — сигнатура, w — мир и $\mathbb{I}$ — подходящая интерпретация.

Параметр $\dot{p}$ встречается *свободным* в основном инфоне

$$\sigma = \langle\!\langle R, s_1 \rightsquigarrow a_1, \ldots, s_n \rightsquigarrow a_n, i\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}$$

сигнатуры Σ и интерпретации $\mathbb{I}$, а при этом также в отношении R, если существует по крайней мере один такой индекс k при $1 \leq k \leq n$, что выполняется условие $\dot{p} = a_k$.[2]

Параметр $\dot{p}$ встречается *свободным* в абстрактной ситуации I, если существует по меньшей мере один такой инфон $\sigma \in I$, в которым $\dot{p}$ встречается свободным.

Множество всех инфонов, в которых встречается $\dot{p}$, обозначается $I(\dot{p})$.

Инфон, в котором встречается по крайней мере один свободный параметр, называется *параметрическим инфоном*. В обратном случае он называется *непараметрическим инфоном*. ◊

Вывод 2.57. *Основный параметрический инфон возникает при присоединении интерпретации к параметрическому представлению инфона. Аналогично возникает из непараметрического представления инфона — всегда непараметрический инфон.*

Доказательство. Это следует из определений 2.56 (стр. 59), 2.30 (стр. 42) и 2.37 (стр. 52). □

[2] При рассматривания высших логиков здесь достаточно если $\dot{p}$ встречается свободным в a_k.

Определение 2.58. Функция f, которая присоединяет к параметру $\dot{p}$ типа T инфона σ объект множества $A \subseteq \{ \mathbb{I}^I(a) \mid a \in D_T \}$, называется *якорем* множества A. Если это присоединение действует для всех свободных параметров в σ или в множестве I инфонов, то примем тогда обозначение $\sigma[f]$ или $I[f]$. $\diamondsuit$

Определение 2.59. Пусть $I \subseteq \mathfrak{I}$ — множество инфонов и s — ситуация. То *тип объектов*

$$T = [\, \dot{x} \mid s \vDash I \,] \tag{2.53}$$

определяется следующим условием:

x является индивидуумом типа T тогда и только тогда, когда существует такой якорь в s, что является верным

$$s \vDash I[f] \text{ и } f(\dot{x}) = \mathbb{I}^I(x). \tag{2.54}$$

Ситуация s называется *основной ситуацией* типа T.
В случае $I = \{ \sigma \}$ можно написать

$$T = [\, \dot{x} \mid s \vDash \sigma \,]. \tag{2.55}$$

Если $\dot{x}$ не встречается свободным в инфоне σ или во множестве I, то имеем *вырожденное определение*.

Два типа объектов $[\, \dot{p} \mid s_1 \vDash I_1 \,]$ и $[\, \dot{q} \mid s_2 \vDash I_2 \,]$ являются *равно определенными*, если I_2 возникает из I_1, когда в I_1 заменяют каждый параметр $\dot{p}$ — параметром $\dot{q}$ и верно $s_1 = s_2$. Это обозначается через

$$[\, \dot{p} \mid s_1 \vDash I_1 \,] =_d [\, \dot{q} \mid s_2 \vDash I_2 \,]. \tag{2.56}$$

$\diamondsuit$

Замечание 2.60. Следовательно, к свободным параметрам инфонов, которые находятся на месте аргументов, неявно применяется квантор существования.

Определение 2.61. Пусть s — ситуация мира w и $I \subseteq \mathfrak{I}$ — множество инфонов. Параметр $\dot{p}$ встречается в типе объектов $[\, \dot{q} \mid s \vDash I \,]$ согласно определению 2.59 (стр. 60), если $\dot{p}$ встречается в $\dot{q}$ или в I. $\diamondsuit$

Определение 2.62. Пусть $I \subseteq \mathfrak{I}$ — множество инфонов. Тогда при

$$T = [\, \dot{s} \mid \dot{s} \vDash I \,] \tag{2.57}$$

определяется *тип ситуаций*, для которого верно:

$$s \text{ от типа } T, \text{ если и только если существует якорь } f \text{ так, что } s \vDash I[f]. \tag{2.58}$$

Если множество I состоит только из одного инфона σ, то записывается

$$T = [\, \dot{s} \mid \dot{s} \vDash \sigma \,]. \tag{2.59}$$

Два типа ситуаций $[\, \dot{s}_1 \mid \dot{s}_1 \vDash I_1 \,]$ и $[\, \dot{s}_2 \mid \dot{s}_2 \vDash I_2 \,]$ называются *равно определенными*, если верно $I_1 = I_2$. Это имеет обозначение

$$[\, \dot{s}_1 \mid \dot{s}_1 \vDash I_1 \,] =_d [\, \dot{s}_2 \mid \dot{s}_2 \vDash I_2 \,]. \tag{2.60}$$

$\diamondsuit$

Пример 2.63. В примере раздела 2.2 можно записать все инфоны, которые поддержаны ситуацией. Но это не всегда возможно и часто не является необходимым. Не нужно часто также, заниматься и точно определенной ситуацией. Тогда достаточно иметь тип ситуаций достаточно. Если мы хотим заниматься ситуациями, где существует башня, то в принципе не важно знать, какой кубик находиться сверху, в середине или снизу. Важно только, что *один* кубик находится наверху, *один* в середине и *один* внизу. Это мы описываем с помощью параметров, описывающих время и для кубиков. При этом достаточно рассмотреть тип ситуаций из формулы (2.61).

$$\begin{aligned} S_1 = [\, \dot{s}_1 \mid \dot{s}_1 \vDash \{\, & \langle\!\langle \mathrm{ist\_vom\_Typ}\_W, \dot{w}_1, 1 \rangle\!\rangle, \\ & \langle\!\langle \mathrm{ist\_vom\_Typ}\_W, \dot{w}_2, 1 \rangle\!\rangle, \\ & \langle\!\langle \mathrm{ist\_vom\_Typ}\_W, \dot{w}_3, 1 \rangle\!\rangle, \\ & \langle\!\langle \mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow \dot{w}_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow \dot{w}_2, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow \dot{t}_1, 1 \rangle\!\rangle, \\ & \langle\!\langle \mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow \dot{w}_2, \mathit{unten} \rightsquigarrow \dot{w}_3, \mathit{Zeit} \rightsquigarrow \dot{t}_1, 1 \rangle\!\rangle \,\}\,] \end{aligned} \tag{2.61}$$

Замечание 2.64. Для ситуации s инфоническое высказывание всегда равноценно параметрическому высказыванию. Например, инфоническое высказывание $s \vDash I$ соответствует параметрическому высказыванию $s : T$, если верно $T = [\, \dot{s} \mid \dot{s} \vDash I \,]$.

Пример 2.65. Вернемся к примеру из главы 2.2 со страницы 29. Для этого примера верны высказывания $p : P$, $w_1 : W$, $w_2 : W$ и $w_3 : W$. Для каждого типа T существует одноместное тестовое отношение $\mathrm{ist\_vom\_Typ}\_T : REL^1$.

Определение 2.66. Пусть Σ — сигнатура и $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$ подходящая интерпретация. Для типа T сигнатуры Σ *интерпретация типа* определяется формулой

$$\mathbb{I}^I(T) := \{\, \mathbb{I}^I(x) \mid x : T \,\}. \tag{2.62}$$

Тип T_1 называется *интерпретативным подтипом* другого типа T_2, если для T_1 и T_2 выполняется условие $\mathbb{I}^I(T_1) \subseteq \mathbb{I}^I(T_2)$. Это обозначается $T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$ или $T_2 \sqsupseteq_{\mathbb{I}} T_1$.

Два типа T_1 и T_2 называются *равно интерпретированными*, если верно:

$$\mathbb{I}^I(T_1) = \mathbb{I}^I(T_2).$$

Для этого будем использовать обозначение $T_1 =_{\mathbb{I}} T_2$. $\diamondsuit$

Вывод 2.67. *Если верно $T_1 : T_2$, то следует и $T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$.*

Доказательство. При $T_1 : T_2$ верно $\{ x : T_1 \} \subseteq \{ x : T_2 \}$. Отсюда следует высказывание при $\mathbb{I}^I(\{ x : T_1 \}) \subseteq \mathbb{I}^I(\{ x : T_2 \})$. $\square$

Определение 2.68. Пусть C — конечное множество инфонов и $\dot{q} \in V_T$ — параметр типа T. Тогда параметр $\dot{p} \in V_T$ с

$$\dot{p} = \dot{q} \upharpoonright C \tag{2.63}$$

обозначают *стесненный параметр*. Если параметр $\dot{p}$ не встречается свободным ни в одном инфоне множества C, то это определение является вырожденное определение стесненного параметра.

Если C состоит только из одного инфона σ, то можно написать стесненный параметр в виде формы $\dot{q} \upharpoonright \sigma$. $\diamondsuit$

Определение 2.69. Параметр $\dot{p}$ встречается в стесненном параметре $\dot{q} \upharpoonright C$, если $\dot{p} = \dot{q}$ или $\dot{p}$ встречается в C. $\diamondsuit$

Определение 2.70. Пусть $\dot{p} = \dot{q} \upharpoonright C$ — стесненный параметр и s — ситуация. Функция f называется *якорем* параметра $\dot{p}$ в ситуацию s, если выполняется следующие условия:

1. f является якорем параметра $\dot{q}$ и каждого параметра, который встречается свободным в C;

2. для каждого инфона $\sigma \in C$ верно: $s \vDash \sigma[f]$.

3. $f(\dot{p}) = f(\dot{q})$. $\diamondsuit$

Замечание 2.71. Если в множестве инфонов $I(\dot{v}_1)$ заменяют параметр $\dot{v}_1$ через $\dot{v}_2$, то получается множество инфонов $I(\dot{v}_2)$, и не обязательно является верным

$$\dot{v}_1 \upharpoonright I(\dot{v}_1) = \dot{v}_2 \upharpoonright I(\dot{v}_2). \tag{2.64}$$

С другой стороны верно

$$[\,\dot{v}_1 \mid s \vDash I(\dot{v}_1)\,] =_d [\,\dot{v}_2 \mid s \vDash I(\dot{v}_2)\,]. \tag{2.65}$$

Следовательно, места аргументов типов не являются параметрами, даже если они определены с их помощью. Места аргументов типа обозначают для одного места аргумента через $\arg_T$ или $\arg_T^1$ по $\arg_T^n$ — для n мест аргументов.

Определение 2.72. Пусть $I \subseteq \mathfrak{I}$ — множество инфонов и w — мир. Ситуация

$$s(I) := \bigcap \{\, s \in \mathfrak{S} \mid s \vDash I[f], f \text{ является якорем множества } I \text{ в } w \,\} \tag{2.66}$$

определяет *ситуацию к множеству* I. ♢

Определение 2.73. Пусть $w = (W, F)$ — мир, Γ — множество параметрических инфонов и $a \in W$ — объект мира. Ситуация

$$\begin{aligned}\mathrm{Oracle}_\Gamma(a) := s\big(\{\, \sigma[f] \bigm| w \vDash \sigma[f], \sigma \in \Gamma,&\\ f \text{ являющаяся якорем в } w, a \in \mathrm{Act}(\sigma[f])\,\}\big)&\end{aligned} \tag{2.67}$$

называется *оракулом объекта* a относительно множества Γ.

Пусть $A \subseteq W$ — множество объектов мира. Ситуация

$$\mathrm{Oracle}_\Gamma(A) := \bigcap_{a \in A} \Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma(a) \cup \Big(A \setminus \{\, a \,\}, \{\, w_x(t) \bigm| x \in A \setminus \{\, a \,\}\,\}\Big)\Big) \tag{2.68}$$

называется *оракулом множества* A относительно множества Γ. ♢

2.4.2 Определение

Определение 2.74. Пусть w — мир. *Составные инфоны* определяются индуктивно:

1. Основный инфон одновременно является составным инфоном.
2. Если σ_1 и σ_2 — составные инфоны, то также их *конъюнкция* $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ и их *дизъюнкция* $(\sigma_1 \vee \sigma_2)$ являются составными инфонами.
3. Пусть $\dot{x}$ подходящий для множества U параметр, который встречается свободным в σ, то при σ также $\forall(\dot{x} \in U)\sigma$ и $\exists(\dot{x} \in U)\sigma$ являются составными инфонами. В этом случае параметр $\dot{x}$ называется *связанным параметром*.

4. При σ, $\overline{\sigma}$ также является составным инфоном.

Параметр встречается в составном инфоне σ', если он встречается в оной из его частей, а не связан относительно пункта 3.

Составные инфоны — только те инфоны, отвечающие пунктам 1—4. ◊

Определение 2.75. Пусть $\dot{x} : T$ — параметр типа T, $U \subseteq \mathbb{I}^I(D_T)$ — подходящее множество объектов этого типа T, s — ситуация и σ — инфон, в котором встречается параметр $\dot{x}$ свободным. Для *квантора существования* определяют:

$$s \vDash \exists(\dot{x} \in U)\sigma \tag{2.69}$$

тогда и только тогда, когда существует такой якорь f параметра $\dot{x}$ на элемент $x \in U$ так, что выполняется $s \vDash \sigma[f]$.

Соответственно, для *квантора общности* определяют:

$$s \vDash \forall(\dot{x} \in U)\sigma \tag{2.70}$$

тогда и только тогда, когда для каждого элемента $x \in U$ существует якорь f от $\dot{x}$ на x так, что $s \vDash \sigma[f]$.

Относительно перехода к двойственному инфону устанавливаем:

$$\overline{\exists(\dot{x} \in U)\sigma} = \forall(\dot{x} \in U)\overline{\sigma}, \tag{2.71a}$$

$$\overline{\forall(\dot{x} \in U)\sigma} = \exists(\dot{x} \in U)\overline{\sigma}. \tag{2.71b}$$

◊

Замечание 2.76. Иногда можно осмысленно, определить дополнительные кванторы, как, например, „большинство“ или „мало“. При использовании общей логики согласно примеру 2.17, не всегда необходимо расширять формализм. Часто достаточно рассмотреть инфоны формы $\langle\langle M, U, S, T, l, t, i \rangle\rangle_{\mathbb{I}}$. В случае „большинство“, для $i = 1$, этот инфон обозначает, что большинство объектов типа S во множестве U (на месте l во времени t) также являются объектами типа T. Для $i = 0$ этот инфон показывает, что именно не большинство объектов типа S во множестве U (в месте l во времени t) также являются объектами типа T. Этот метод можно и использовать, для описания определенных здесь операторов.

Замечание 2.77. Рассмотрим n-местное отношение R, в инфоне

$$\sigma = \langle\langle R, a_1, \ldots, a_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, i \rangle\rangle_{\mathbb{I}}$$

которого только первые m $(m < n)$ места назначены определенными значениями. Если этот инфон поддержан ситуацией, то это для $i = 1$ соответствует высказыванию:

$$s \models \exists(\dot{x}_{m+1}, \ldots, \dot{x}_n \in s)\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_m, \dot{x}_{m+1}, \ldots, \dot{x}_n, 1\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}, \tag{2.72}$$

или в двойственном случае:

$$s \models \forall(\dot{x}_{m+1}, \ldots, \dot{x}_n \in s)\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_m, \dot{x}_{m+1}, \ldots, \dot{x}_n, 0\rangle\!\rangle_{\mathbb{I}}. \tag{2.73}$$

Определение 2.78. Пусть σ_1 и σ_2 — два инфона и s — ситуация. Конъюнкция $(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$ двух инфонов поддержана ситуацией s $(s \models (\sigma_1 \wedge \sigma_2))$ тогда и только тогда, когда $s \models \sigma_1$ и $s \models \sigma_2$.

Также дизъюнкция $(\sigma_1 \vee \sigma_2)$ поддержана ситуацией s $(s \models (\sigma_1 \vee \sigma_2))$ тогда и только тогда, когда $s \models \sigma_1$ или $s \models \sigma_2$.

Для двойственного инфона существуют следующие правила

$$\overline{(\sigma_1 \wedge \sigma_2)} = (\overline{\sigma}_1 \vee \overline{\sigma}_2), \tag{2.74a}$$

$$\overline{(\sigma_1 \vee \sigma_2)} = (\overline{\sigma}_1 \wedge \overline{\sigma}_2). \tag{2.74b}$$

$\diamondsuit$

Вывод 2.79. *Для составных инфонов также верно* $\overline{\overline{\sigma}} = \sigma$.

Доказательство. Рассмотрим индуктивно пункты определения 2.74. Сначала это свойство показано при выводах 2.24 и 2.35 для пункта 1 определения 2.74 (стр. 63).

Рассмотрим сейчас пункт 2 того же определения. Тогда верно

$$\overline{\overline{(\sigma_1 \wedge \sigma_2)}} = \overline{(\overline{\sigma}_1 \vee \overline{\sigma}_2)} = (\overline{\overline{\sigma}}_1 \wedge \overline{\overline{\sigma}}_2) = (\sigma_1 \wedge \sigma_2)$$

относительно определения 2.78. Аналогично можно показать

$$\overline{\overline{(\sigma_1 \vee \sigma_2)}} = (\sigma_1 \vee \sigma_2).$$

Также следует из определения 2.75 при обозначении относительно данного определения:

$$\overline{\overline{\exists(\dot{x} \in U)\sigma}} = \overline{\forall(\dot{x} \in U)\overline{\sigma}} = \exists(\dot{x} \in U)\overline{\overline{\sigma}} = \exists(\dot{x} \in U)\sigma.$$

Доказательство для $\overline{\overline{\forall(\dot{x} \in U)\sigma}} = \forall(\dot{x} \in U)\sigma$ проводится аналогичным образом.

При этом высказывание уже доказано, потому что для пункта 4 срочно из $\overline{\overline{\sigma}} = \sigma$ следует сразу двойственная версия $\overline{\overline{\overline{\sigma}}} = \overline{\sigma}$. $\square$

Вывод 2.80. *Пусть Σ — сигнатура, w — мир и $\mathbb{I}$ — подходящая интерпретация между ними. Пусть далее существуют два отношения R и S с подходящими индивидуумами $a_1, \ldots, a_n$, для которых существует множество M, которое выполняет условие $\mathbb{I}^R(R) \cup \mathbb{I}^R(S) \subseteq M$.*

Тогда для ситуации s при предпосылке

$$\mathbb{I}^R(R \cap S) := \mathbb{I}^R(R) \cap \mathbb{I}^R(S) \text{ und } \mathbb{I}^R(R \cup S) := \mathbb{I}^R(R) \cup \mathbb{I}^R(S) \tag{2.75}$$

выполнены условия

$$\begin{gathered} s \models (\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \\ \text{тогда и только тогда, если } s \models \langle\!\langle R \cap S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle \text{ и} \end{gathered} \tag{2.76a}$$

$$\begin{gathered} s \models (\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \\ \text{тогда и только тогда, если } s \models \langle\!\langle R \cup S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle, \end{gathered} \tag{2.76b}$$

если интерпретации туплетов всех инфонов равны, что значит

$$\begin{aligned} \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) &= \mathbb{I}^T(\langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \\ &= \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R \cap S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \\ &= \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R \cup S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle), \end{aligned} \tag{2.77}$$

и если существует соответствующее отношение $Q = R \cap S$ или $P = R \cup S$ в сигнатуре.

Доказательство. Впервые заметим, что пункт 2 и равенство (2.31) пункта 1 определении 2.27 (стр. 41) либо верны для всех участвующих инфонов, либо не верны ни для одного из них. Это следует из равной интерпретации туплета. Пусть это условие выполняется в дальнейшем. Иначе никакой из этих инфонов не будет поддержаться ситуацией s. Следовательно, в этом случае высказывание верно.

Рассмотрим сейчас случай (2.76a). Верно:

$$\begin{gathered} s \models (\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \text{ тогда и только тогда, когда} \\ s \models \langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle \text{ и } s \models \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle \text{ тогда и только тогда, когда} \\ \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(R) \text{ и } \mathbb{I}^T(\langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(S). \end{gathered}$$

При (2.77) это действует тогда и только тогда, если верно:

$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(R) \text{ и } \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(S),$$

следовательно тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(R) \cap \mathbb{I}^R(S), \text{ итак}$$
$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle Q, a_1, \ldots, a_n, 1\rangle\!\rangle) \in \mathbb{I}^R(Q).$$

А это то, требовалось доказать.

Рассмотрим также:

$$s \vDash (\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \text{ тогда и только тогда. когда}$$
$$s \vDash \langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle \text{ и } s \vDash \langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle \text{ тогда и только тогда, когда}$$
$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(R) \text{ и } \mathbb{I}^T(\langle\!\langle S, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(S).$$

Согласно (2.77) это выполняется, когда и только когда верно:

$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(R) \text{ и } \mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(S),$$

значит, если и только если

$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle R, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(R) \cup \mathbb{I}^R(S), \text{ итак } \mathbb{I}^T(\langle\!\langle P, a_1, \ldots, a_n, 0\rangle\!\rangle) \notin \mathbb{I}^R(P).$$

При этом также показано (2.76b). □

Замечание 2.81. Пусть I — множество инфонов, в котором встречаются параметры $\dot{p}$ и $\dot{q}$. Тогда очевидны условия

$$\begin{gathered}
\text{для всех } x \in M \text{ верно: } s \vDash I[f] \text{ при } f(\dot{p}) = x \text{ и } f(\dot{q}) = y,\\
s \vDash \{\, \sigma[f] \mid \sigma \in I, f(\dot{p}) \in M, f(\dot{q}) = y \,\},\\
s \vDash \forall(\dot{p} \in M) I[f] \text{ при } f(\dot{p}) = \dot{p} \text{ и } f(\dot{q}) = y,
\end{gathered} \tag{2.78}$$

эквивалентными для любого множества M объектов, которое выполняет одно из условий из (2.78). При этом в дальнейшем рассмотрим типы

$$\begin{aligned}
&[\,\dot{q} \mid \text{для всех } x \in M : s \vDash I[f] \text{ при } f(\dot{p}) = x \text{ и } f(\dot{q}) = \dot{q}\,],\\
&[\,\dot{q} \mid s \vDash \{\, \sigma[f] \mid \sigma \in I, f(\dot{p}) \in M, f(\dot{q}) = \dot{q} \,\}\,] \text{ и}\\
&[\,\dot{q} \mid s \vDash \forall(\dot{p} \in M) I[f] \text{ при } f(\dot{p}) = \dot{p} \text{ и } f(\dot{q}) = \dot{q}\,]
\end{aligned}$$

идентичными относительно равенства определений. Такого и верно для квантора существования

Замечание 2.82. Keith Devlin говорит только об основных инфонах как действительных. Со стороны мира это выглядит самовольно. Но если ограничиться одной сигнатурой и одной интерпретацией, то могут существовать инфоны, которые нельзя описать основными инфонами, но можно описать их с помощью других инфонов как составные.

Вывод 2.83. *Пусть s — ситуация и σ_1 и σ_2 два (составных) инфона. Тогда из $s \models \sigma_1$ следует срочно $s \models (\sigma_1 \vee \sigma_2)$.*

2.5 Связи

Дополнительным понятием теории ситуаций является понятие связей. Далее в работе оно будет нам не нужно, но для полноты обзора рассмотрим это понятие.

Связи являются логическими соответствиями между ситуациями, типично типами ситуаций. Они являются ситуацио-теоретической заменой импликации предикативной логики. Связь C обозначается формулой

$$C = [\, S_1 \Longrightarrow S_2 \,], \tag{2.79}$$

причем S_1 и S_2 являются типами ситуаций. Для каждой связи существуют основополагающие условия. Эти предпосылки должны гарантировать, что связь не передает дезинформации. К сожаленью их трудно ловить и еще труднее описать формально.

В (Devlin 1993) классифицируют связи следующим образом:

номинистическая связь связь, принадлежащая естественным законам.

рефлексивная связь связь, которая описывает информацию об одной и той же ситуации.

необходимая связь связь, которая следует из схемы индивидуации, значит которая схематично реализована без разработки информаций.

конвенционная связь не естественный закон, может следовать к дезинформации.

лингвистическая связь конвенционная связь к языку, общезнакомая.

Актеры могут быть настраиваемы на связи; то есть они подгонят их поведение к связи. Когда актер индивидуирует или дискриминирует ситуацию типа S_1, он реагирует точно так, как он реагировал бы, если бы он индивидуировал или дискриминировал ситуацию типа S_2. Типичным примером является Павловский рефлекс, где в ситуации s раздается звоном колокола, причем у настроенной собаки выделиться слюна, потому что это действует по конвенции тогда, когда ситуация s является такой, в которой кормят собаку.

Пример 2.84. Здесь тоже наш путь приводит нас к началу главы, к примеру из раздела 2.2.

Пусть даны инфоны

$$\langle\!\langle \mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, 1 \rangle\!\rangle \text{ и}$$
$$\langle\!\langle \mathrm{oberhalb}, \mathit{unten} \rightsquigarrow w_2, \mathit{oben} \rightsquigarrow w_1, 1 \rangle\!\rangle.$$

Тогда существует связь между ними. Рассмотрим два типа ситуаций:

$$S_a = [\, \dot{s} \mid \dot{s} \models \langle\!\langle \mathrm{auf}, \mathit{oben} \rightsquigarrow \dot{w}_1, \mathit{unten} \rightsquigarrow \dot{w}_2, 1 \rangle\!\rangle \,] \text{ и} \tag{2.80a}$$
$$S_b = [\, \dot{s} \mid \dot{s} \models \langle\!\langle \mathrm{oberhalb}, \mathit{unten} \rightsquigarrow \dot{w}_2, \mathit{oben} \rightsquigarrow \dot{w}_1, 1 \rangle\!\rangle \,]. \tag{2.80b}$$

Тогда существует связь $[\, S_a \Longrightarrow S_b \,]$, причем здесь верно $s_1 : S_a$ и $s_1 : S_b$. Следовательно мы имеем рефлексивную связь.

3 Описание формального анализа понятий с помощью теории ситуаций

3.1 Мир как контекст

Рассмотрим мир $w = (W, F)$ в фиксированной точке времени $t \in T$, тогда можно понимать его и как многозначный контекст. При этом свойственные функции $w_x^e(t)$ играют роль выражений признаков. Множество W объектов мира составляет множество предметов, а множество E свойств мира является множеством признаков.

Определение 3.1. Пусть $w = (W, F)$ — мир, причем верно

$$F = \left\{ w_x(t) \mid x \in W \right\} = \left\{ \left(w_x^e(t)\right)_{e \in E} \mid x \in W \right\}.$$

Тогда многозначный контекст

$$\mathbb{K}_t(w) := (W, E, M, \kappa) \tag{3.1}$$

при

$$M := \{ w_x^e(t) \mid e \in E, x \in W \}, \tag{3.2}$$

$$\kappa \subseteq W \times E \times M, \tag{3.3}$$

$$(x, e, w') \in \kappa, \text{ если и только если } w' = w_x^e(t) \tag{3.4}$$

называется *контекстом мира* w в точке времени t. $\Diamond$

Рассмотрим решетку понятий такого контекста. При использовании соответствующей сигнатуры всегда можно определить тип объектов, который соответствует понятиям этой решетки. Предпосылка этому является только существование отношения R, которое при интерпретации точно отображается на отношение тех объектов, которые имеют эти признаки. Для этого существуют несколько возможностей. Рассмотрим одну из них в этой главе.

Но при поиске понятия для данного типа объектов, вполне вероятно, что не существует ни подходящее множество предметов, ни подходящего множества признаков. Это показывает между прочем пример 3.4 на странице 72.

Определение 3.2. Пусть $\{\, \mathbb{K}_t \mid t \in T \,\}$ — семейство многозначных контекстов при $\mathbb{K}_t = (G_t, M_t, W_t, \kappa_t)$. Мир $w(\{\, \mathbb{K}_t \mid t \in T \,\}) = (G, F)$ при

$$G = \bigcup_{t \in T} G_t, \qquad M = \bigcup_{t \in T} M_t, \tag{3.5}$$

$$w_g^m(t) := \begin{cases} w, & \text{для } (g, m, w) \in \kappa \\ \text{неопределенно}, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \text{и} \tag{3.6}$$

$$F := \left\{ \left(w_g^m(t)\right)_{m \in M} \,\middle|\, g \in G \right\} \tag{3.7}$$

называется *миром семейства контекстов* $\{\, \mathbb{K}_t \mid t \in T \,\}$. Если семейство состоит только из контекста $\mathbb{K}$, то мир

$$w(\mathbb{K}) = (G, F) \tag{3.8}$$

называется *миром контекста* $\mathbb{K}$. $\Diamond$

Замечание 3.3. Однозначный контекст $\mathbb{K} = (G, M, \kappa)$ можно расширить в многозначный контекст $\mathbb{K}' = (G, M, M, \kappa')$, если определяют

$$(g, m, m) \in \kappa', \text{ когда и только когда } g \;\kappa\; m. \tag{3.9}$$

Пример 3.4. Пусть $w(\mathbb{K})$ мир контекста на иллюстрации 3.1. Пусть сигнатура и интерпретация таковы, что для каждого предмета множества

$$\{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,\}$$

существует соответствующий индивидуум с тем же обозначением в D_{IND}, соответственно

$$D_{IND} = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \,\}.$$

Пусть также

$$\mathfrak{R} = \{\, R_a, R_b, R_c, R_d, R_e, R_f, R_g, R_h, R_i \,\}.$$

Для каждого признака $x \in \{\, a, b, c, d, e, f, g, h, i \,\}$ интерпретируется отношение R_x так, что

$$w \models \langle\!\langle R_x, y, 1 \rangle\!\rangle \text{ тогда и только тогда, когда } y \;\kappa\; x.$$

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	×	×					×		
2	×	×					×	×	
3	×	×	×				×	×	
4	×		×				×	×	×
5	×	×		×		×			
6	×	×	×	×		×			
7	×		×	×	×				
8	×		×	×		×			

Рис. 3.1: Пример контекста

Это значит в частности:

$$\mathbb{I}^I(x) = x,$$
$$\mathbb{I}^R(R_y) = y^\kappa \times \{\, y \,\},$$
$$\mathbb{I}^T\langle\!\langle R_y, x, i\rangle\!\rangle = (x, w_x^y(t)).$$

Тогда для типа T_1 верно при условия

$$T_1 = [\,\dot{p} \mid w \vDash (\langle\!\langle R_b, \dot{p}, 1\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle R_c, \dot{p}, 0\rangle\!\rangle\,])\ :$$

$$\{\, x \mid x\!:\!T_1 \,\} = \{\, 1, 2, 5 \,\},$$
$$(\{\, 1, 2, 5 \,\}^{\kappa\kappa}, \{\, 1, 2, 5 \,\}^{\kappa}) = (\{\, 1, 2, 3, 5, 6 \,\}, \{\, a, b \,\}).$$

С другой стороны тип T_2 с

$$<<<<<<< \mathit{variant} AT_2 = [\,\dot{p} \mid w \vDash (\langle\!\langle R_a, \dot{p}, 1\rangle\!\rangle \wedge \langle\!\langle R_b, \dot{p}, 1\rangle\!\rangle\,])$$

выделяет точно те признаки (в определении) и предметы

$$\{\, g \mid g\!:\!T_2 \,\} = \{\, 1, 2, 3, 5, 6 \,\}$$

(в действии) данного понятия.

3.2 Расширение контекста

В формальном анализе понятий рассматривают предметы и признаки, как двойственные. Это включает некоторое равноправие между обоими множествами, что между прочем выражает

$$\mathfrak{B}(G, M, \kappa_G) \cong \mathfrak{B}(M, G, \kappa_G^{-1}) \text{ при } m \; \kappa_G^{-1} \; g, \text{ если и только если } g \; \kappa_G \; m. \tag{3.10}$$

Дополнительные информации к этой теме можно найти в (Ganter и Wille 1996).

В следующем мы попробуем, перенести это на нашу теорию. Но для этого необходимо иметь в мире не только предметы, как объекты, но также и признаки. Это значит согласно определению 3.2 (стр. 72), что в исходном контексте мира все признаки являются и предметами. С другой стороны при этом расширении решетка понятий не должна меняться. Описанный метод расширения контекста имеет удобный посторонний эффект, который заключается в том, что предметное понятие и призначное понятие одного признака совпадают, следовательно они займут одно и то же место в диаграмме Hasse решетки.

Для этого выведем из исходного контекста

$$\mathbb{K}_G = (G, M, \kappa_G) \tag{3.11}$$

расширенный контекст

$$\mathbb{K} = \frac{\mathbb{K}_G}{\mathbb{K}_M} = (G \,\dot{\cup}\, M, M, \kappa_G \cup \kappa_M) \tag{3.12}$$

при

$$\kappa_M = \bigcup_{m \in M} \{\, m \,\} \times m^{\kappa_G \kappa_G} \tag{3.13}$$

и

$$\mathbb{K}_M = (M, M, \kappa_M). \tag{3.14}$$

Иллюстрация 3.2 разъясняет это.

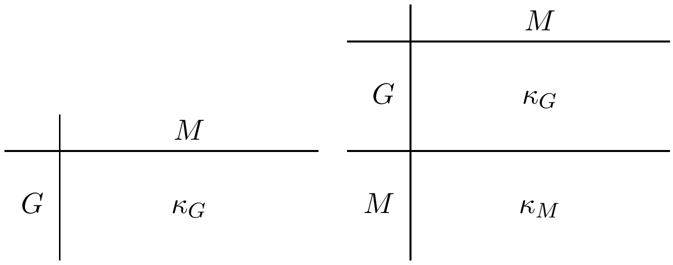
Для этого контекста легко можно проверить следующие равенства:

$$\kappa {=} \kappa_G \cup \kappa_M, \tag{3.15a}$$

$$A \subseteq G \,\dot{\cup}\, M : A^{\kappa} = (A \cap G)^{\kappa_G} \cap (A \cap M)^{\kappa_M}, \tag{3.15b}$$

$$B \subseteq M : B^{\kappa} = B^{\kappa_G} \,\dot{\cup}\, B^{\kappa_M}, \tag{3.15c}$$

$$(m, m') \in \kappa_M \text{ тогда и только тогда, когда } m' \in m^{\kappa_G \kappa_G}. \tag{3.15d}$$



(a) $\mathbb{K}_G$ (b) $\mathbb{K}$

Рис. 3.2: Исходный контекст $\mathbb{K}_G$ и расширенный контекст $\mathbb{K}$

Теорема 3.5. *Пусть* $\mathbb{K}_G = (G, M, \kappa_G)$ *и* $\mathbb{K} = (G \mathbin{\dot\cup} M, M, \kappa_G \cup \kappa_M)$ — *два контекста, которые выполняют равенства с* (3.11) *до* (3.14). *Тогда для соответствующих решеток понятий верно*

$$\mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \cong \mathfrak{B}(\mathbb{K}). \tag{3.16}$$

Доказательство. Достаточно найти два преобразования γ и μ, которые выполняют условия основной теоремы формального анализа понятий (теорема 1.14, стр. 19).

Итак, рассмотрим

$$\gamma\, g = \begin{cases} (g^{\kappa_G \kappa_G}, g^{\kappa_G}), & g \in G \\ (g^{\kappa_G}, g^{\kappa_G \kappa_G}), & g \in M \end{cases} \quad \text{и} \tag{3.17}$$

$$\mu\, m = (m^{\kappa_G}, m^{\kappa_G \kappa_G}), \tag{3.18}$$

то γ — является плотным относительно объединения в решетке $\mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$ и μ — плотным относительно пересечения. Это представлено в доказательстве основной теоремы (Ganter и Wille 1996) (сравни также со следствием 1.15, стр. 20).

Из того же доказательства следует и для $g \in G$:

$$g\, \kappa\, m, \text{ если и только если } \gamma\, g \sqsubseteq \mu\, m.$$

Для $g \in M$ и $m \in M$ при конструкции контекста $\mathbb{K}$ следующие высказывания являются эквивалентными:

$$\begin{gathered} g\ \kappa\ m, \\ m \in g^{\kappa_M}, \\ m \in g^{\kappa_G \kappa_G}, \\ m^{\kappa_G \kappa_G} \subseteq g^{\kappa_G \kappa_G}, \\ (g^{\kappa_G}, g^{\kappa_G \kappa_G}) \sqsubseteq (m^{\kappa_G}, m^{\kappa_G \kappa_G}) \\ \text{и } \gamma\, g \sqsubseteq \mu\, m. \end{gathered}$$

При этом следует для любых $g \in G \dot{\cup} M$ и любых $m \in M$:

$$\gamma\, g \sqsubseteq \mu\, m, \text{ когда и только когда } g\ \kappa_G\ m. \qquad \square$$

Вывод 3.6. *Из доказательства теоремы 3.5 следует для $g \in M$:*

$$\gamma\, g = \mu\, g. \tag{3.19}$$

Доказательство. Для $g = m$ следует равенство, согласно (3.17) и (3.18). □

Лемма 3.7. *Пусть $\mathbb{K}_G = (G, M, \kappa_G)$ и $\mathbb{K} = (G \dot{\cup} M, M, \kappa_G \cup \kappa_M)$ — два контекста, которые выполняют равенства с* (3.11) *по* (3.14). *Тогда верно для двух множеств $A \subseteq G$ и $B \subseteq M$*

$$(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \text{ тогда и только тогда, если } (A \dot{\cup} B^{\kappa_M}, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}). \tag{3.20}$$

Доказательство. Проведем это доказательство в несколько этапов. Сначала покажем для отображения $\varphi(A, B) := (A \dot{\cup} B^{\kappa_M}, B)$ справедливость высказывания:

$$\varphi : \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}).$$

1. Пусть $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$. Тогда верно $A \subseteq G$, а значит $A \cap M = \emptyset$ относительно $A \subseteq G \dot{\cup} M$. Из этого следует:

$$\begin{aligned} A^{\kappa\kappa} &= \big((A \cap G)^{\kappa_G} \cap (A \cap M)^{\kappa_M}\big)^{\kappa} \\ &= (A^{\kappa_G} \cap \emptyset^{\kappa_M})^{\kappa} \\ &= (A^{\kappa_G} \cap M)^{\kappa} \\ &= (A^{\kappa_G})^{\kappa_G} \dot{\cup} (A^{\kappa_G})^{\kappa_M} \\ &= A \dot{\cup} B^{\kappa_M} \end{aligned}$$

При этом $A \dot{\cup} B^{\kappa_M}$ является объемом понятия в $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$.

2. Из пункта 1. далее вытекает:
$$\begin{aligned}(A \mathbin{\dot\cup} B^{\kappa_M})^{\kappa} &= \big((A \mathbin{\dot\cup} B^{\kappa_M}) \cap G\big)^{\kappa_G} \cap \big((A \mathbin{\dot\cup} B^{\kappa_M}) \cap M\big)^{\kappa_M}\\ &= A^{\kappa_G} \cap B^{\kappa_M\kappa_M}\\ &= B,\end{aligned}$$
поскольку $B = B^{\kappa_G\kappa_G} = B^{\kappa_M}$. При этом из $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$ также следует
$$(A \mathbin{\dot\cup} B^{\kappa_M}, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}). \tag{3.21}$$

3. Необходимо также показать, что отображение $\varphi : \mathfrak{B}(\mathbb{K}_M) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ при
$$\varphi(A, B) := (A \mathbin{\dot\cup} B^{\kappa_M}, B)$$
является биективным.

Инъективность является очевидной, потому что
$$\begin{aligned}(A_1 \mathbin{\dot\cup} B_1^{\kappa_M}, B_1) = (A_2 \mathbin{\dot\cup} B_2^{\kappa_M}, B_2), &\text{ когда и только когда}\\ B_1 = B_2, &\text{ если и только если}\\ (A_1, B_1) = (A_2, B_2). &\end{aligned} \tag{3.22}$$

Остается показать сюръективность. Пусть сейчас $(C, D) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$. Тогда верно
$$(C \cap G, D) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$$
и
$$\varphi(C \cap G, D) = (C, D).$$
Первое соотношение следует из
$$\begin{aligned}C \cap G &= (D^{\kappa_G} \mathbin{\dot\cup} D^{\kappa_M}) \cap G \qquad (3.23)\\ &= (D^{\kappa_G} \cap G) \mathbin{\dot\cup} (D^{\kappa_M} \cap G)\\ &= D^{\kappa_G},\\ D &= C^{\kappa} \qquad (3.24)\\ &= (C \cap G)^{\kappa_G} \cap (C \cap M)^{\kappa_M}\\ &= (C \cap G)^{\kappa_G} \cap D^{\kappa_M\kappa_M}.\end{aligned}$$
Для любого признака $g \in (G \mathbin{\dot\cup} M) \cap M$ верно:
$$\begin{aligned}g \in D^{\kappa_M} &\text{ тогда и только тогда, когда } \forall d \in D : d \in g^{\kappa_G\kappa_G}\\ &\text{ тогда и только тогда, когда } D \subseteq g^{\kappa_G\kappa_G}\\ m \in D^{\kappa_M\kappa_M} &\text{ тогда и только тогда, когда } \forall g \in D^{\kappa_M} : m \in g^{\kappa_G\kappa_G}.\end{aligned}$$

При этом из $n \in D^{\kappa_G \kappa_G}$ для всех признаков g при $D \subseteq g^{\kappa_G \kappa_G}$ следует:

$$n \in g^{\kappa_G \kappa_G}.$$

Из этого можно вывести $n \in g^{\kappa_G \kappa_G}$ для всех признаков $g \in D^{\kappa_M}$. Но это равнозначно условию $n \in D^{\kappa_M \kappa_M}$. Следовательно, верно: $D^{\kappa_G \kappa_G} \subseteq D^{\kappa_M \kappa_M}$.

При этом следует из (3.24):

$$\begin{aligned} D &= (C \cap G)^{\kappa_G} \cap D^{\kappa_M \kappa_M} \\ &= D^{\kappa_G \kappa_G} \cap D^{\kappa_M \kappa_M} \\ &= D^{\kappa_G \kappa_G}. \end{aligned}$$

В конце концов мы получим:

$$\begin{aligned} \varphi(C \cap G, D) &= \big((C \cap G) \dot\cup D^{\kappa_M}, D\big) \\ &= (D^{\kappa_G} \dot\cup D^{\kappa_M}, D) \\ &= (D^{\kappa}, D) \\ &= (C, D). \end{aligned}$$

Также $\varphi^{-1}(C, D) = (C \cap G, D)$ является инъективным. Это можно показать аналогично равенству (3.22). Из инъективности идентичности $\varphi \circ \varphi^{-1}$ следует сюръективность отображения φ и биективность того же отображения φ. При этом φ^{-1} является обратным отображением отображения φ. $\square$

Лемма 3.8. *Пусть $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_G$ и $\mathbb{K}_M$ — контексты отвечающими равенствам (3.11)–(3.14) (стр. 74).*

Для каждого признака $m \in M$ следующие оба условия являются эквивалентными:

1. *m является $\sqcap$-приводимым в $\mathbb{K}_G$,*
2. *m является $\sqcap$-приводимым в $\mathbb{K}$,*

Если далее верно для m и для всех $g \in G$

$$m^{\kappa_M} \neq g^{\kappa_G}, \tag{3.25}$$

то m в роли предмета является $\sqcup$-приводимым в $\mathbb{K}_M$ тогда и только тогда, когда выполнено условие 1.

Доказательство. Из леммы 3.7 и изоморфности соответствующих решеток понятий (смотри также Ganter и Wille 1996, глава 1.2) следует эквивалентность пункта 1 и 2. Эквивалентность последнего высказывания можно показать следующим образом:

Пусть $g \in M$. Тогда верно:

$$g^{\kappa_M} = X^{\kappa_M} \quad \text{тогда и только тогда, когда}$$
$$g^{\kappa_G \kappa_G} = X^{\kappa_G \kappa_G} \quad \text{тогда и только тогда, когда}$$
$$g^{\kappa_G} = g^{\kappa_G \kappa_G \kappa_G} = X^{\kappa_G \kappa_G \kappa_G} = X^{\kappa_G}.$$

При этом можно представить g в $\mathbb{K}_G$ с помощью пересечения множества понятий признака $\mu(X)$. □

Пример 3.9. Рассмотрим еще раз контекст $\mathbb{K}_G$ примера 3.4 (Рис. 3.1, стр. 73). На рисунки 3.3 (стр. 79) изображена диаграмма HASSE решетки понятий контекста $\mathbb{K}_G$. При этом только предметные и призначные понятия обозначаются названиями. Содержания и объемы одного понятия являются предметными понятиями, лежащие выше и призначными понятиями, лежащие ниже того же понятия.

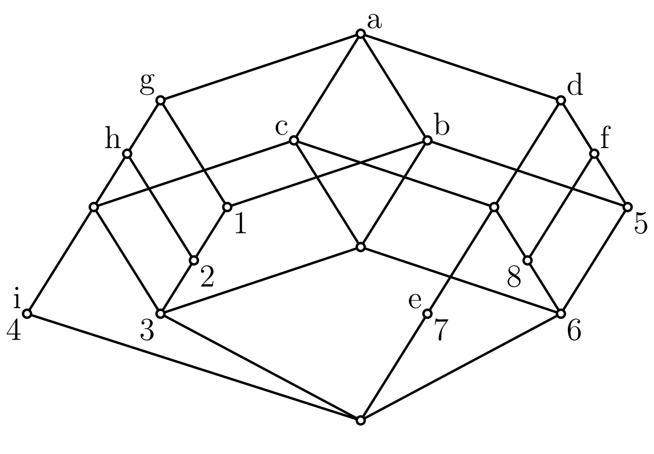


Рис. 3.3: Решетка понятий контекстов $\mathbb{K}$ и $\mathbb{K}_G$.

Если хочется расширить контекст, как описано в этой главе, то получается контекст $\mathbb{K}$ относительно иллюстрации 3.4. Верхняя часть является контекстом $\mathbb{K}_G$; нижняя часть составляет призначный контекст $\mathbb{K}_M$.

Решетка понятий общего контекста $\mathbb{K}$ является идентичной решетке понятий исходного контекста $\mathbb{K}_G$, а на рисунке 3.5 будет представлена решетка

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	×	×					×		
2	×	×					×	×	
3	×	×	×				×	×	
4	×		×				×	×	×
5	×	×		×		×			
6	×	×	×	×		×			
7	×		×	×	×				
8	×		×	×		×			
a	×								
b	×	×							
c	×		×						
d	×			×					
e	×		×	×	×				
f	×			×		×			
g	×						×		
h	×						×	×	
i	×		×				×	×	×

Рис. 3.4: Пример расширенного контекста

понятий $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_M)$ признaчного контекста. В фоне нарисована решетка понятий $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$. Следуя выше ведущим линиям, то можно видеть, что нет вложения решеток, но существует вложение порядков решетки $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_M)$ в $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$. Последнее следует из изоморфии решеток $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$ и $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$.

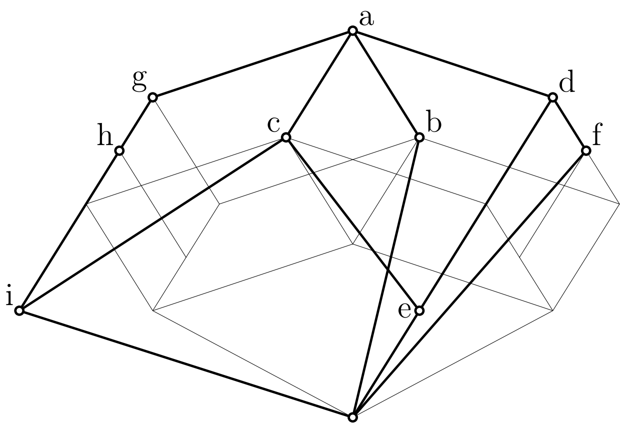


Рис. 3.5: Диаграмма Hasse признaчного контекста $\mathbb{K}_M$.

3.3 Контекст как мир

Перейдем к представлению контекста с помощью теории ситуации. В последнем разделе было показано, что решетки понятий расширенного контекста $\mathbb{K}$ и исходного контекста $\mathbb{K}_G$ являются изоморфными. Итак, мы можем рассматривать общий контекст $\mathbb{K}$ без изменения результатов.

Мир $w(\mathbb{K})$ контекста $\mathbb{K}$ уже описан в определении 3.2 (стр. 72). Прежде всего нам необходима сигнатура, с помощью которой можно описывать мир.

Определение 3.10. Пусть $\mathbb{K}_G = (G, M, \kappa_G)$ — контекст,

$$m, m_1, m_2 \in M, g \in G \text{ и}$$

$$w_g^m(t) := m, \text{ если и только если } g \; \kappa_G \; m, \tag{3.26}$$

$$w_{m_2}^{m_1}(t) := m_1, \text{ если и только если } m_1 \in m_2^{\kappa_G \kappa_G} \tag{3.27}$$

и при $g' \in G \,\dot{\cup}\, M$

$$w_{g'}(t) := \left(w_{g'}^m(t)\right)_{m \in M}. \tag{3.28}$$

Структура $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ при

$$\breve{w}(\mathbb{K}_G) := \big(\{\, g \in G \mathbin{\dot\cup} M \mid g^{\kappa_G} \neq \emptyset \,\}, \{\, w_g(t) \mid g \in G \mathbin{\dot\cup} M, g^{\kappa_G} \neq \emptyset \,\}\big) \tag{3.29}$$

называется *расширенным миром контекста* $\mathbb{K}_G$. $\Diamond$

Вывод 3.11. *Пусть* $\mathbb{K}_G$ *— контекст и* $\mathbb{K}_M$ *и* $\mathbb{K}$ *— определены согласно* (3.11)—(3.14)*, то* $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ *является миром и верно*

$$\mathfrak{B}\Big(\mathbb{K}\big(\breve{w}(\mathbb{K}_G)\big)\Big) \cong \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \tag{3.30}$$

при простой, номинальной шкализации.

Доказательство. В формуле (3.29) предметы и признаки, у которых нет полных строк или столбцов в контексте $\mathbb{K}_G$, определяют объекты мира. При этом для каждого объекта определена по крайней мере одна свойственная функция и при этом линия мира для каждой точки времени t. Следовательно, $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ является миром.

Пусть также

$$\mathfrak{B}\Big(\mathbb{K}\big(\breve{w}(\mathbb{K}_G)\big)\Big) = \mathfrak{B}(\{\, g \in G \mathbin{\dot\cup} M \mid g^{\kappa_G} \neq \emptyset \,\}, M, \kappa).$$

У каждого признака $m \in M$ может быть в контексте $\mathbb{K}\big(\breve{w}(\mathbb{K}_G)\big)$ точно со одным свойством. При этом номинальная шкала признака m является контекстом $\big(\{\, m \,\}, \{\, m \,\}, \{\, (m, m) \,\}\big)$.

Следовательно, для $g \in \{\, g \in G \mathbin{\dot\cup} M \mid g^{\kappa_G} \neq \emptyset \,\}$ и для $m_1, m_2 \in M$ верно: $(g, m_1, m_2) \in \kappa_w$ в $\mathbb{K}\big(\breve{w}(\mathbb{K}_G)\big)$ тогда и только тогда, когда $m_1 = m_2$ и $g \;\kappa\; m_1$ в $\mathbb{K}$. При этом $\mathbb{K}\big(\breve{w}(\mathbb{K}_G)\big)$ является частичным контекстом контекста $\mathbb{K}$, в котором отсутствуют именно пустые строки и полные столбцы.

Чтобы показать изоморфность решеток понятий, достаточно проверить, что пустые строки контекста $\mathbb{K}$ являются приводимыми. Но для предмета $g \in G$ контекста $\mathbb{K}$, который выполняет $g^{\kappa} = \emptyset$, верно:

$$\begin{aligned} \gamma\, g &= \inf\{\, \gamma\, h \mid h \in G \,\} \\ &= \sup \emptyset. \end{aligned}$$

Для $m \in M$, который выполняет $m^{\kappa_G} = \emptyset$, верно $m^{\kappa_G \kappa_G} = M$. При этом в контексте $\mathbb{K}$ получается полная строка, которая всегда приводима (смотри Ganter и Wille 1996, главу 1.2). $\square$

После фиксирования мира, мы можем сейчас выбрать доступную сигнатуру. Из различных вариантов выбираем сигнатуру Σ и подходящую интерпретацию $\mathbb{I}$, как описано в определении 3.12.

Определение 3.12. Пусть $\mathbb{K}_G$ — контекст и $\mathbb{K}$ — расширенный контекст относительно уравнений (3.11)—(3.14). Тогда сигнатура $\Sigma = (\mathfrak{G}, \mathfrak{R})$ мира $w(\mathbb{K})$ называется *сигнатурой контекста* $\mathbb{K}$, а интерпретация $\mathbb{I} = (\mathbb{I}^I, \mathbb{I}^R, \mathbb{I}^T)$ — *интерпретацией контекста* $\mathbb{K}$, если выполняются следующие условия:

1. Существуют три типа T_G, T_M и IND, для которых верно

$$\mathbb{I}^I(a) \in G, \text{ когда и только когда } a : T_G \tag{3.31a}$$

$$\mathbb{I}^I(b) \in M, \text{ когда и только когда } b : T_M \tag{3.31b}$$

и интерпретация индивидуумов является сюръективной, что обозначает, что для каждого предмета $g \in G$ существует индивидуум $a : T_G$ при $\mathbb{I}^I(a) = g$ и для каждого признака $m \in M$ существует индивидуум $b : T_M$, для которого верно $\mathbb{I}^I(b) = m$. Далее верно $T_G : IND$ и $T_M : IND$.

2. существует двухместное отношение $R_{\mathbb{K}} \in \mathfrak{R}$, для которого верно:

$$\mathbb{I}^R(R_{\mathbb{K}}) = \kappa_G \quad \text{и} \tag{3.32}$$

$$\mathbb{I}^T(\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, a, b, i \rangle\!\rangle) = (a, b). \tag{3.33}$$

$\diamondsuit$

Замечание 3.13. До конца этой главы используем интерпретацию и сигнатуру из определении 3.12. Тоже там, где это не специально сказано. Все параметры и индивидуумы, тип которых не назван, являются от типа IND.

Определение 3.14. Пусть $A \subseteq D_{T_G}$ и $B \subseteq D_{T_M}$ — два множества объектов мира $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ и κ_G — отношение инцидентности контекста $\mathbb{K}_G$. Тогда операторы ${}^{\kappa_G}$ определяются следующим образом:

$$A^{\kappa_G} := \big[\, \dot{q} \bigm| w \vDash \forall\big(\dot{p} \in \mathbb{I}^I(A)\big) \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \,\big], \tag{3.34a}$$

$$B^{\kappa_G} := \big[\, \dot{p} \bigm| w \vDash \forall\big(\dot{q} \in \mathbb{I}^I(B)\big) \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \,\big]. \tag{3.34b}$$

Для одного предмета $g : T_G$, одного признака $m : T_M$ или одного типа используем следующие обозначения:

$$g^{\kappa_G} := \{\, g \,\}^{\kappa_G}, \tag{3.35}$$

$$m^{\kappa_G} := \{\, m \,\}^{\kappa_G} \quad \text{и} \tag{3.36}$$

$$T^{\kappa_G} := \{\, x : T \,\}^{\kappa_G}. \tag{3.37}$$

$\diamondsuit$

Определение 3.15. Пусть $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$ — понятие контекста $\mathbb{K}_G$ и $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ — соответствующий расширенный мир, и

$$T_G^A := [\,\dot{p} \mid w \models \forall(\dot{q} \in B)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle\,], \tag{3.38a}$$

$$T_M^B := [\,\dot{q} \mid w \models \forall(\dot{p} \in A)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle\,]. \tag{3.38b}$$

Тогда T_G^A называется *типом содержания понятия* и T_M^B *типом объема понятия*. ♢

Вывод 3.16. *Пусть* (A, B) *— понятие из решетки понятий* $\mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$*. Тогда верно*

$$\mathbb{I}^I(T_G^A) = A \text{ и} \tag{3.39a}$$

$$\mathbb{I}^I(T_M^B) = B. \tag{3.39b}$$

Доказательство. Верно: $x \in \mathbb{I}^I(T_G^A)$ тогда и только тогда, когда существует индивидуум $a \in D_{IND}$ при $a : T_G^A$ таким, что $\mathbb{I}^I(a) = x$. Это верно точно тогда, когда такой индивидуум выполняет следующие условия:

$$a : [\,\dot{p} \mid w \models \forall(\dot{q} \in B)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle\,],$$

что равнозначно условию

$$w \models \forall(\dot{q} \in B)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, a, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle.$$

Это соответствует

$$w \models \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, a, q, 1\rangle\!\rangle \text{ для всех } q \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(B).$$

Последнее выражение является действительным точно тогда, когда для всех $q \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(B)$ верно: $\mathbb{I}^I(a)\ \kappa_G\ \mathbb{I}^I(q)$, или если для всех $y \in B$ и $\mathbb{I}^I(a) = x$ верно: $x\ \kappa_G\ y$.

Сигнатура и интерпретация выбраны так, что индивидуумы интерпретируются сюръективно. Следовательно для каждого $y \in B$ существует индивидуум $b : T_M$ таким образом, чтобы верно $y = \mathbb{I}^I(b)$. Аналогично, для каждого $x \in A$ существует индивидуум $a : T_G$ при $\mathbb{I}^I(a) = x$.

Следовательно, $x \in \mathbb{I}^I(T_G^A)$ тогда и только тогда, если для всех $y \in B$ верно: $x\ \kappa_G\ y$. Это равнозначно условию $x \in B^{\kappa_G}$. Так как для понятий верно $A = B^{\kappa_G}$, следовательно высказывание (3.39a) справедливо.

Доказательство для (3.39b) следует аналогично. □

Лемма 3.17. *Согласно определению 3.14 (стр. 83), используя интерпретацию из определения 3.12 (стр. 83), верно для любого типа* $T : T_G$ *или* $T : T_M$

$$\mathbb{I}^I(T^{\kappa_G}) = \big(\mathbb{I}^I(T)\big)^{\kappa_G}. \tag{3.40}$$

Доказательство. Сначала покажем справедливость этого выражения в случае $T : T_G$. Верно:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^I(T^{\kappa_G}) &= \mathbb{I}^I(\{\, x : [\, \dot{q} \mid w \vDash \forall(\dot{p} : T) \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \,] \,\}) \\
&= \mathbb{I}^I(\{\, x \mid \forall(p : T)\, w \vDash \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, p, x, 1 \rangle\!\rangle \,\}) \\
&= \mathbb{I}^I(\{\, x \mid \forall(p : T)\, \mathbb{I}^I(p)\ \kappa_G\ \mathbb{I}^I(x) \,\}) \\
&= \mathbb{I}^I(\{\, x \mid \mathbb{I}^I(x) \in (\mathbb{I}^I(T))^{\kappa_G} \,\}) \\
&= \big(\mathbb{I}^I(T)\big)^{\kappa_G}.
\end{aligned}$$

При этом показано справедливость этого выражения. Для $T : T_M$ доказательство проводится аналогичным образом. □

Вывод 3.18. *Пусть* $T_A : T_G$ *и* $T_B : T_M$ *два типа, которые выполняют условия* $\mathbb{I}^I(T_A) = A$ *и* $\mathbb{I}^I(T_B) = B$. $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$ *верно тогда и только тогда, когда выполняются следующие уравнения:*

$$(T_A)^{\kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_B, \tag{3.41a}$$

$$(T_B)^{\kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_A. \tag{3.41b}$$

Доказательство.

1. Из $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$ следуют (3.41a) и (3.41b):

   Верно:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}^I\Big(\big(T_B\big)^{\kappa_G}\Big) &= \mathbb{I}^I\big([\, \dot{p} \mid w \vDash \forall(\dot{q} \in \mathbb{I}^I(T_B)) \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \,]\big) \\
&= \mathbb{I}^I\big([\, \dot{p} \mid w \vDash \forall(\dot{q} \in B) \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \,]\big) \\
&= \{\, g \in G \mid g\ \kappa_G\ m \text{ für alle } m \in B \,\} \\
&= B^{\kappa_G} = A = \mathbb{I}^I(T_A).
\end{aligned}$$

   В силу двойственности выражений следует аналогично $(T_A)^{\kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_B$.

2. Из (3.41a) и (3.41b) следует $(A, B) \in \mathfrak{B}(G, M, \kappa_G)$:

   Пусть $(T_A)^{\kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_B$. Из леммы 3.17 следует
$$\mathbb{I}^I(T_B) = \mathbb{I}^I\big((T_A)^{\kappa_G}\big) = \big(\mathbb{I}^I(T_A)\big)^{\kappa_G}.$$
   Из этого, используя вывод 3.16 следует равенство $B = A^{\kappa_G}$. В силу двойственности выражений следует аналогично $A = B^{\kappa_G}$.

Таким образом мы показали эквивалентность, что и требовалось. □

Замечание 3.19. Из доказательства вывода 3.18 следует эквивалентность термов A^{κ_G} и $\big(T_G^A\big)^{\kappa_G}$ и термов B^{κ_G} и $\big(T_M^B\big)^{\kappa_G}$ для любых множеств $A \subseteq G$ и $B \subseteq M$.

Определение 3.20. Пусть $T_1 = [\,\dot{p} \mid s_1 \vDash I_1\,]$ и $T_2 = [\,\dot{p} \mid s_2 \vDash I_2\,]$ — два типа и φ — функция замыкания на множестве инфонов. Тогда операторы $\sqcap_\varphi$ и $\sqcup$ определяются следующим образом:
$$T_1 \sqcup T_2 := [\,\dot{p} \mid s_1 \cup s_2 \vDash I_1 \cap I_2\,] \text{ и} \tag{3.42a}$$
$$T_2 \sqcap_\varphi T_2 := [\,\dot{p} \mid s_1 \cap s_2 \vDash \varphi(I_1 \cup I_2)\,]. \tag{3.42b}$$
◊

Определение 3.21. Пусть $T_1 = [\,\dot{p} \mid s_1 \vDash I_1\,]$ и $T_2 = [\,\dot{p} \mid s_2 \vDash I_2\,]$ — два типа. Отношение $\sqsubseteq_d$ определяется формулой:
$$T_1 \sqsubseteq_d T_2, \text{ если и только если } T_1 \sqcup T_2 = T_2. \tag{3.43}$$
Тогда T_1 называется *подтипом* типа T_2, и T_2 — *родовым типом* типа T_1. Возможно также запись $T_2 \sqsupseteq_d T_1$. Если верно $T_1 \sqsubseteq_d T_2$ и $T_2 \sqsubseteq_d T_1$, то это обозначается $T_1 =_d T_2$. ◊

Вывод 3.22. *Если $T_1 \sqsubseteq_d T_2$, то верно $T_1 : T_2$.*

Доказательство. Если верно $T_1 \sqsubseteq_d T_2$, то для $T_1 =_d [\,\dot{p} \mid s_1 \vDash I_1\,]$ и $T_2 =_d [\,\dot{p} \mid s_2 \vDash I_2\,]$ справедливо условие $T_1 \sqcup T_2 =_d T_2$. Это значит, что
$$[\,\dot{p} \mid s_1 \cup s_2 \vDash I_1 \cap I_2\,] =_d [\,\dot{p} \mid s_2 \vDash I_2\,].$$
При этом $I_2 \subseteq I_1$ и $s_1 \subseteq s_2$. Пусть сейчас $a : T_1$. Тогда существует якорь f от I_1 в s_1 при $f(\dot{p}) = \mathbb{I}^I(a)$. При этом f также является якорем от I_2 в s_2, потому что для каждого инфона σ из I_1 выполняется условие $s_1 \vDash \sigma[f]$. Так как $s_1 \subseteq s_2$, то s_2 тоже поддерживает каждый инфон, поддерживающий s_1, следовательно и каждый $\sigma[f]$ при $\sigma \in I_1$. Так как для каждого индивидуума a существует якорь от I_1 в s_1, этот якорь также является якорем от I_2 в s_2. При этом также верно $a : T_2$. □

Лемма 3.23. *Пусть $T_1 : T_G$ и $T_2 : T_G$ — два типа предметов. Тогда верно*

$$T_1^{\kappa_G\kappa_G} \sqsubseteq_d T_2^{\kappa_G\kappa_G} \text{ тогда и только тогда, когда } T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2. \tag{3.44}$$

Также верно для двух типов признаков $T_3 : T_M$ и $T_4 : T_M$

$$T_3^{\kappa_G\kappa_G} \sqsubseteq_d T_4^{\kappa_G\kappa_G} \text{ тогда и только тогда, когда } T_3 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_4. \tag{3.45}$$

Доказательство. Для двух типов T_1 и T_2 верно:

$$T_1^{\kappa_G\kappa_G} \sqsubseteq_d T_2^{\kappa_G\kappa_G},$$

если и только если

$$[\, \dot{p} \mid w \vDash \forall(\dot{q} : T_1^{\kappa_G})\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \,] \sqsubseteq_d [\, \dot{p} \mid w \vDash \forall(\dot{q} : T_2^{\kappa_G})\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \,],$$

если и только если

$$\{\, \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, q, 1 \rangle\!\rangle \mid q : T_1^{\kappa_G} \,\} \supseteq \{\, \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, q, 1 \rangle\!\rangle \mid q : T_2^{\kappa_G} \,\},$$

если и только если

$$\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\} \supseteq \{\, q : T_2^{\kappa_G} \,\},$$

причем следует

$$\mathbb{I}^I(\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\}) \supseteq \mathbb{I}^I(\{\, q : T_2^{\kappa_G} \,\}).$$

Поэтому верно

$$\mathbb{I}^I(\{\, p : T_1 \,\}) \subseteq \mathbb{I}^I(\{\, p : T_2 \,\}),$$

что можно получить аналогичным образом при помощи уже показанного.

Остается сейчас показать, что из

$$\mathbb{I}^I(\{\, p : T_1 \,\}) \subseteq \mathbb{I}^I(\{\, p : T_2 \,\}),$$

следует условие

$$\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\} \supseteq \{\, q : T_2^{\kappa_G} \,\}.$$

В силу антитонности оператора $^{\kappa_G}$ следует из

$$\mathbb{I}^I(\{\, p : T_1 \,\}) \subseteq \mathbb{I}^I(\{\, p : T_2 \,\})$$

сначала

$$\big(\mathbb{I}^I(\{\, p : T_1 \,\})\big)^{\kappa_G} \supseteq \big(\mathbb{I}^I(\{\, p : T_2 \,\})\big)^{\kappa_G}.$$

По помощи леммы 3.17 получим при этом следующее

$$\mathbb{I}^I(\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\}) \supseteq \mathbb{I}^I(\{\, q : T_2^{\kappa_G} \,\}).$$

С другой стороны при определении типа $T_1^{\kappa_G}$ верно

$$\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\} = \mathbb{I}^{I^{-1}}\big(\mathbb{I}^I(\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\})\big),$$

так как справедливо

$$\begin{gathered} q' \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big(\mathbb{I}^I(\{\, p : T_1^{\kappa_G} \,\})\big), \text{ когда и только когда} \\ \mathbb{I}^I(q') \in \mathbb{I}^I(\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\}), \text{ когда и только когда} \\ \mathbb{I}^I(q') \in \big(\mathbb{I}^I(\{\, q : T_1 \,\})\big)^{\kappa_G}, \text{ когда и только когда} \\ \text{для всех } x \in \mathbb{I}^I(\{\, q : T_1 \,\}) \text{ верно } x \; \kappa_G \; \mathbb{I}^I(q'), \text{ если и только если} \\ w \vDash \forall(\dot{p} : T_1)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, q', 1 \rangle\!\rangle, \text{ когда и только когда} \\ q : T_1^{\kappa_G}. \end{gathered}$$

Соответствующее верно и для T_2. Так как интерпретация индивидуумов $\mathbb{I}^I$ определена по элементам, следовательно она монотонна относительно множества. Из этого следует

$$\{\, q : T_1^{\kappa_G} \,\} \supseteq \{\, q : T_2^{\kappa_G} \,\}.$$

А также

$$T_1^{\kappa_G \kappa_G} \sqsubseteq_d T_2^{\kappa_G \kappa_G} \text{ тогда и только тогда, если } T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2.$$

Аналогичным образом проводится доказательство для T_3 и T_4. □

Теорема 3.24. *В случае существования всех членов верны следующие условия для трех типов T_1, T_2 и T_3:*

$$T_1 \sqcap_\varphi T_1 \sqsubseteq_d T_1, \qquad T_1 \sqcup T_1 =_d T_1, \tag{3.46a}$$

$$T_1 \sqcap_\varphi T_2 =_d T_2 \sqcap_\varphi T_1, \qquad T_1 \sqcup T_2 =_d T_2 \sqcup T_1, \tag{3.46b}$$

$$T_1 \sqcap_\varphi (T_2 \sqcap_\varphi T_3) =_d (T_1 \sqcap_\varphi T_2) \sqcap_\varphi T_3, \qquad T_1 \sqcup (T_2 \sqcup T_3) =_d (T_1 \sqcup T_2) \sqcup T_3, \tag{3.46c}$$

$$T_1 \sqcap_\varphi (T_1 \sqcup T_2) \sqsubseteq_d T_1, \qquad T_1 \sqcup (T_1 \sqcap_\varphi T_2) =_d T_1. \tag{3.46d}$$

Если $I_1 = \varphi(I_1)$ для $T_1 =_d [\, \dot{p} \mid s_1 \vDash I_1 \,]$, то эти выражения являются тождествами.

Доказательство. Верно (если существует $s_1 \cap s_2$):

Для (3.46a):

$$T_1 \sqcup T_1 =_d [\,\dot{p} \mid s_1 \cup s_1 \vDash I_1 \cap I_1\,] =_d [\,\dot{p} \mid s_1 \vDash I_1\,] =_d T_1.$$
$$T_1 \sqcap_\varphi T_1 =_d [\,\dot{p} \mid s_1 \cap s_1 \vDash \varphi(I_1 \cup I_1)\,] \sqsubseteq_d [\,\dot{p} \mid s_1 \vDash I_1\,] =_d T_1,$$

потому что $I_1 \subseteq \varphi(I_1)$. Очевидно, что в случае $I_1 = \varphi(I_1)$ верно равенство $T_1 \sqcap_\varphi T_1 =_d T_1$.

Для (3.46b):

$$\begin{aligned} T_1 \sqcap_\varphi T_2 &=_d [\,\dot{p} \mid s_1 \cap s_2 \vDash \varphi(I_1 \cup I_2)\,] \\ &=_d [\,\dot{p} \mid s_2 \cap s_1 \vDash \varphi(I_2 \cup I_1)\,] \\ &=_d T_2 \sqcap_\varphi T_1. \\ T_1 \sqcup T_2 &=_d [\,\dot{p} \mid s_1 \cup s_2 \vDash I_1 \cap I_2\,] \\ &=_d [\,\dot{p} \mid s_2 \cup s_1 \vDash I_2 \cap I_1\,] \\ &=_d T_2 \sqcup T_1. \end{aligned}$$

Для (3.46c):

$$\begin{aligned} T_1 \sqcap_\varphi (T_2 \sqcap_\varphi T_3) &=_d T_1 \sqcap_\varphi [\,\dot{p} \mid s_2 \cap s_3 \vDash \varphi(I_2 \cup I_3)\,] \\ &=_d \big[\,\dot{p} \mid s_1 \cap (s_2 \cap s_3) \vDash \varphi\big(I_1 \cup \varphi(I_2 \cup I_3)\big)\,\big]. \end{aligned}$$

Так как φ является функцией замыкания, верно:

$$\varphi\big(I_1 \cup \varphi(I_2 \cup I_3)\big) \subseteq \varphi\big(\varphi(I_1 \cup I_2 \cup I_3)\big) = \varphi(I_1 \cup I_2 \cup I_3)$$
$$\varphi\big(I_1 \cup \varphi(I_2 \cup I_3)\big) \supseteq \varphi(I_1 \cup I_2 \cup I_3),$$

итак,

$$\varphi\big(I_1 \cup \varphi(I_2 \cup I_3)\big) = \varphi(I_1 \cup I_2 \cup I_3).$$

При этом верно:

$$\begin{aligned}
T_1 \sqcap_\varphi (T_2 \sqcap_\varphi T_3) &=_d \big[\, \dot p \;\big|\; (s_1 \cap s_2) \cap s_3 \vDash \varphi\big(\varphi(I_1 \cup I_2) \cup I_3\big) \,\big] \\
&=_d [\, \dot p \mid s_1 \cap s_2 \vDash \varphi(I_1 \cup I_2) \,] \sqcap_\varphi T_3 \\
&=_d (T_1 \sqcap_\varphi T_2) \sqcap_\varphi T_3. \\
T_1 \sqcup (T_2 \sqcup T_3) &=_d T_1 \sqcup [\, \dot p \mid s_2 \cup s_3 \vDash I_2 \cap I_3 \,] \\
&=_d [\, \dot p \mid s_1 \cup (s_2 \cup s_3) \vDash I_1 \cap (I_2 \cap 3) \,] \\
&=_d [\, \dot p \mid (s_1 \cup s_2) \cup s_3 \vDash (I_1 \cap I_2) \cap I_3 \,] \\
&=_d [\, \dot p \mid s_1 \cup s_2 \vDash I_1 \cap I_2 \,] \sqcup T_3 \\
&=_d (T_1 \sqcup T_2) \sqcup T_3.
\end{aligned}$$

Для (3.46d):

$$\begin{aligned}
T_1 \sqcap_\varphi (T_1 \sqcup T_2) &=_d T_1 \sqcap_\varphi [\, \dot p \mid s_1 \cup s_2 \vDash I_1 \cap I_2 \,] \\
&=_d \big[\, \dot p \;\big|\; s_1 \cap (s_1 \cup s_2) \vDash \varphi\big(I_1 \cup (I_1 \cap I_2)\big) \,\big] \\
&=_d [\, \dot p \mid s_1 \vDash \varphi(I_1) \,] \\
&\sqsubseteq_d [\, \dot p \mid s_1 \vDash I_1 \,] =_d T_1.
\end{aligned}$$

Здесь также верно равенство для $\varphi(I_1) = I_1$.

$$\begin{aligned}
T_1 \sqcup (T_1 \sqcap_\varphi T_2) &=_d T_1 \sqcup [\, \dot p \mid s_1 \cap s_2 \vDash \varphi(I_1 \cup I_2) \,] \\
&=_d [\, \dot p \mid s_1 \cup (s_1 \cap s_2) \vDash I_1 \cap \varphi(I_1 \cup I_2) \,] \\
&=_d [\, \dot p \mid s_1 \vDash I_1 \,] =_d T_1,
\end{aligned}$$

так как $I_1 \cup I_2 \subseteq \varphi(I_1 \cup I_2)$ и $I_1 \cap (I_1 \cup I_2) = I_1$. □

Лемма 3.25. *Пусть I — множество инфонов расширенного мира $\breve w(\mathbb{K}_G)$ контекста $\mathbb{K}_G$. Пусть далее*

$$\sigma := \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, \dot q, 1 \rangle\!\rangle, \Gamma = \{\, \sigma \,\} \text{ и} \tag{3.47}$$

$$O_G(I) := \mathrm{Oracle}_\Gamma\Big(\mathrm{Obj}\big(\mathrm{Oracle}_\Gamma(\mathrm{Obj}(I) \cap M)\big) \cap G\Big), \tag{3.48a}$$

$$O_M(I) := \mathrm{Oracle}_\Gamma\Big(\mathrm{Obj}\big(\mathrm{Oracle}_\Gamma(\mathrm{Obj}(I) \cap G)\big) \cap M\Big). \tag{3.48b}$$

Тогда

$$\varphi(I) := I \cup \left\{ \sigma[f] \;\middle|\; O_G(I) \models \forall\Big(\dot{p} \in \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_{\Gamma}\big(\mathrm{Obj}(I \cap M)\big)\Big) \cap G\Big)\sigma[f], f(\dot{q}) \in M, f(\dot{p}) = \dot{p} \right\} \tag{3.49a}$$

и

$$\psi(I) := I \cup \left\{ \sigma[f] \;\middle|\; O_M(I) \models \forall\Big(\dot{q} \in \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_{\Gamma}\big(\mathrm{Obj}(I \cap G)\big)\Big) \cap M\Big)\sigma[f], f(\dot{q}) = \dot{q}, f(\dot{p}) \in G \right\} \tag{3.49b}$$

являются функциями замыкания.

Доказательство. Относительно вывода 1.7 достаточно, показать эквивалентность высказывания

$$I_1 \subseteq \varphi(I_2) \text{ и } \varphi(I_1) \subseteq \varphi(I_2) \tag{3.50}$$

для двух инфонов I_1 и I_2:

Из $\varphi(I_1) \subseteq \varphi(I_2)$ **следует** $I_1 \subseteq \varphi(I_2)$**:** Очевидно, что:

$$I_1 \subseteq \varphi(I_1).$$

Откуда следует высказывание транзитивности инклюзации множества.

Из $I_1 \subseteq \varphi(I_2)$ **следует** $\varphi(I_1) \subseteq \varphi(I_2)$**:** Пусть $\sigma' \in \varphi(I_1)$. Тогда выполняется одно из двух условий:

$$\sigma' \in I_1 \text{ или}$$
$$\sigma' \in \varphi(I_1) \setminus I_1.$$

В первом случае высказывание является идентичным предпосылке. Рассмотрим второе условие. Пусть

$$s_1 = (W_{s_1}, F_{s_1}) := O_G(I) \text{ и}$$
$$s_2 = (W_{s_2}, F_{s_2}) := \mathrm{Oracle}_{\Gamma}(\mathrm{Obj}(I) \cap M).$$

Тогда верно:

$$\begin{aligned} W_{s_2} &= (\mathrm{Obj}(I) \cap M) \cup \{\, a \mid w \models \forall(\dot{q} \in \mathrm{Obj}(I) \cap M)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, a, \dot{q}, 1 \rangle\!\rangle \,\} \\ &= (\mathrm{Obj}(I) \cap M) \cup \{\, x \in G \mid \forall y \in \mathrm{Obj}(I) \cap M : x \;\kappa_G\; y \,\} \\ &= (\mathrm{Obj}(I) \cap M) \cup (\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G}. \end{aligned}$$

Потому что G и M можно рассмотреть дизъюнктными, верно:

$$W_{s_2} = (\mathrm{Obj}(I) \cap M) \mathbin{\dot\cup} (\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G}$$

При этом для s_1 следует:

$$\begin{aligned}
W_{s_1} &= \mathrm{Obj}\big(O_G(I)\big)\\
&= \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma\Big(\mathrm{Obj}\big(\mathrm{Oracle}_\Gamma(\mathrm{Obj}(I) \cap M)\big) \cap G\Big)\Big)\\
&= \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma\Big(\big((\mathrm{Obj}(I) \cap M) \mathbin{\dot\cup} (\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G}\big) \cap G\Big)\Big)
\end{aligned}$$

и, так как G и M при определении являются дизъюнктными, то

$$\begin{aligned}
W_{s_1} &= \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma\big(\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G}\big)\Big)\\
&= \big(\mathrm{Obj}(I) \cap M\big)^{\kappa_G} \mathbin{\dot\cup} \big(\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G}\big)^{\kappa_G}\\
&= \big(\mathrm{Obj}(I) \cap M\big)^{\kappa_G} \mathbin{\dot\cup} (\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G\kappa_G}.
\end{aligned}$$

При этом верно $W_{s_2} \subseteq W_{s_1}$ и далее:

$$s_2 \models \forall(\dot p \in W_{s_1} \cap G)\sigma[f] \text{ при } f(\dot q) \in M \cap W_{s_2} \text{ и } f(\dot p) = \dot p.$$

Из этого вытекают следующие условия эквивалентности:

$$\begin{aligned}
\sigma' \in \Big\{ \sigma[f] \;\Big|\; & O_G(I) \models \\
& \forall\Big(\dot p \in \mathrm{Obj}\big(\mathrm{Oracle}_\Gamma(\mathrm{Obj}(I) \cap M)\big) \cap G\Big)\sigma[f], f(\dot q) \in M, f(\dot p) = \dot p \Big\}
\end{aligned} \tag{3.51a}$$

тогда и только тогда, когда

$$\sigma' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, q, 1\rangle\!\rangle \text{ und es gilt für alle } \; x \in W_{s_2} \cap G\text{: } x \; \kappa_G \; \mathbb{I}^I(q) \tag{3.51b}$$

тогда и только тогда, когда

$$\sigma' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, q, 1\rangle\!\rangle \text{ при } q \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((W_{s_2} \cap G)^{\kappa_G}\big), \text{ если и только если} \tag{3.51c}$$

$$\sigma' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot p, q, 1\rangle\!\rangle \text{ при } q \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((\mathrm{Obj}(I) \cap M)^{\kappa_G\kappa_G}\big). \tag{3.51d}$$

Пусть $\sigma'' \in I_1$ при

$$\sigma'' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, r, 1\rangle\!\rangle \text{ und } r \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(\mathrm{Obj}(I_1) \cap M),$$

тогда следует

$$r \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((\mathrm{Obj}(I_2) \cap M)^{\kappa_G \kappa_G}\big).$$

в силу свойств функций замыкания функции ${}^{\kappa_G \kappa_G}$. Дальше по той же причине следует

$$\mathbb{I}^{I^{-1}}\big((\mathrm{Obj}(I_1) \cap M)^{\kappa_G \kappa_G}\big) \subseteq \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((\mathrm{Obj}(I_2) \cap M)^{\kappa_G \kappa_G}\big). \tag{3.52}$$

Если сейчас $\sigma''' \in \varphi(I_1) \setminus I_1$, то согласно (3.51a)—(3.51d) следует:

$$\sigma''' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, r', 1\rangle\!\rangle \text{ и } r' \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((\mathrm{Obj}(I_1) \cap M)^{\kappa_G \kappa_G}\big).$$

В силу равенства (3.52) можно получить из тех же уравнений

$$\sigma''' \in \varphi(I_2).$$

Следовательно верно и $\varphi(I_1) \subseteq \varphi(I_2)$. $\square$

Лемма 3.26. *Пусть (A, B) и (C, D) — два понятия контекста $\mathbb{K}_G$, а φ и ψ — определены относительно леммы 3.25. Тогда выполняется следующие равенства:*

$$(A, B) \sqcap (C, D) = \big(\mathbb{I}^I(T_G^A \sqcap_\varphi T_G^C), \mathbb{I}^I(T_M^B \sqcup T_M^D)\big), \tag{3.53a}$$

$$(A, B) \sqcup (C, D) = \big(\mathbb{I}^I(T_G^A \sqcup T_G^C), \mathbb{I}^I(T_M^B \sqcap_\psi T_M^D)\big). \tag{3.53b}$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned}
T_G^A &=_d [\, \dot{p} \mid w \vDash I_A \,],\\
T_M^B &=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash I_B \,],\\
T_G^C &=_d [\, \dot{p} \mid w \vDash I_C \,] \text{ и}\\
T_M^D &=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash I_D \,].
\end{aligned}$$

Пусть также $\sigma = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle$ и $\Gamma = \{\, \sigma \,\}$. Тогда верно:

$$\begin{aligned}
T_M^B \sqcup T_M^D &=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash I_B \cap I_D \,]\\
&=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash \{\, \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, p, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \mid p : T_M^B \text{ и } p : T_M^D \,\}\,]\\
&=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash \{\, \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, p, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \mid p \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(A \cap C) \,\}\,].
\end{aligned}$$

При этом получается:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^I(T^B_M \sqcup T^D_M) &= \{\, \mathbb{I}^I(q) \mid \text{ для всех } p \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(A \cap C) \text{ верно: } \\ &\qquad\qquad w \vDash \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, p, q, 1 \rangle\!\rangle, q : T_M \,\} \\ &= \{\, x \in M \mid \text{ для всех } y \in (A \cap C) \text{ верно: } y \; \kappa_G \; x \,\} \\ &= (A \cap C)^{\kappa_G}.\end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathbb{I}^I(T^A_G \sqcap_\varphi T^C_G)$, тогда будет являться верным:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^I(T^A_G \sqcap_\varphi T^C_G) &= \mathbb{I}^I\big([\,\dot{p} \mid w \vDash \varphi(I_A \cup I_C)\,]\big) \\ &= \mathbb{I}^I\Bigg(\Big[\,\dot{p} \;\Big|\; w \vDash I_A \cup I_C \cup \Big\{\, \sigma[f] \;\Big|\; O_G(I_A \cup I_C) \vDash \\ &\qquad \forall\Big(\dot{p} \in \mathrm{Obj}\Big(\mathrm{Oracle}_\Gamma\big(\mathrm{Obj}(I_A \cup I_C) \cap M\big)\Big) \cap G\Big)\sigma[f], \\ &\qquad f(\dot{q}) \in M, f(\dot{p}) = \dot{p}\,\Big\}\,\Big]\Bigg) \\ &= \mathbb{I}^I\Bigg(\Big[\,\dot{p} \;\Big|\; w \vDash I_A \cup I_C \cup \Big\{\, \sigma[f] \;\Big|\; f(\dot{p}) = \dot{p}, \\ &\qquad f(\dot{q}) \in \big(\mathrm{Obj}(I_A \cup I_C) \cap M\big)^{\kappa_G\kappa_G}\,\Big\}\,\Big]\Bigg).\end{aligned}$$

Последнее равенство получается, согласно (3.51a)—(3.51d). Пусть $\sigma' \in I_A$. Тогда при помощи определения 3.15 (стр. 84) верно: $\sigma' = \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, q, 1 \rangle\!\rangle$ при $q \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(B)$. При этом верно $\mathrm{Obj}(I_A) = B$. Аналогично верным является $\mathrm{Obj}(I_C) = D$. При этом

$$\mathrm{Obj}(I_A \cup I_C) = B \cup D \subseteq M.$$

С другой стороны из этих равенств следует

$$I_A \subseteq \Big\{\, \sigma[f] \;\Big|\; f(\dot{p}) = \dot{p}, f(\dot{q}) \in \big(\mathrm{Obj}(I_A \cup I_C) \cap M\big)^{\kappa_G\kappa_G}\,\Big\}.$$

Такого же верно и для I_C. При этом получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^I(T^A_G \sqcap_\varphi T^C_G) &= \mathbb{I}^I\Big(\big[\,\dot{p} \mid w \vDash \{\, \sigma[f] \mid f(\dot{p}) = \dot{p}, f(\dot{q}) \in (B \cup D)^{\kappa_G\kappa_G} \,\}\,\big]\Big) \\ &= \mathbb{I}^I\big(\{\, p \in \mathbb{I}^{I^{-1}}(G) \bigm| w \vDash \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, p, q, 1 \rangle\!\rangle \text{ для всех} \\ &\qquad q \in \mathbb{I}^{I^{-1}}\big((B \cup D)^{\kappa_G\kappa_G}\big)\,\}\big) \\ &= \{\, g \in G \mid g \; \kappa_G \; m \text{ для всех } m \in (B \cup D)^{\kappa_G\kappa_G} \,\} \\ &= \big((B \cup D)^{\kappa_G\kappa_G}\big)^{\kappa_G} = (B \cup D)^{\kappa_G} \\ &= (A \cap C).\end{aligned}$$

Итак, верно (3.53a).

Доказательство формулы (3.53b) действует проводится аналогичным образом □

Лемма 3.27. *Пусть*

$$M_1 := \{ T \mid T : T_G \} \text{ и} \tag{3.54a}$$
$$M_2 := \{ T \mid T : T_M \}. \tag{3.54b}$$

— множества типов предметов и признаков сигнатуры контекста $\mathbb{K}_G$. *Тогда отображения*

$$\alpha : M_1 \to M_2, \qquad \alpha(T) := T^{\kappa_G}, \tag{3.55a}$$
$$\beta : M_2 \to M_1, \qquad \beta(T) := T^{\kappa_G} \tag{3.55b}$$

составляют соответствие Galois *в соответствии с отношением* $\sqsubseteq_{\mathbb{I}}$.

Доказательство. Пусть для начала $T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$ при $\{ T_1, T_2 \} \in M_1$. Тогда верно:

$$\begin{aligned}
\alpha(T_1) &=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash \forall(\dot{p} \in \mathbb{I}^I(T_1))\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \,], \\
\alpha(T_2) &=_d [\, \dot{q} \mid w \vDash \forall(\dot{p} \in \mathbb{I}^I(T_2))\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \,] \\
&=_{\mathbb{I}} \big[\, \dot{q} \;\big|\; w \vDash \big(\forall(\dot{p} : T_1)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle \wedge \forall\big(\dot{p} \in \mathbb{I}^I(T_2) \setminus \mathbb{I}^I(T_1)\big)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle\big) \,\big],
\end{aligned}$$

итак, из $a : \alpha(T_2)$ следует:

$$w \vDash \forall(\dot{p} : T_1)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, a, 1\rangle\!\rangle.$$

Но это условие равнозначно условию $a : \alpha(T_1)$. Откуда следует справедливость $\alpha(T_2) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \alpha(T_1)$. Аналогично можно показать антитонность для β.

Рассмотрим сейчас $a : T$ для $T \in M_1$. Тогда для каждого $b : \alpha(T)$ верно отношение

$$w \vDash \langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, a, b, 1\rangle\!\rangle.$$

Если применить это аналогично к β, то также верно $a : \beta\big(\alpha(T)\big)$. Соответственное верно и для β.

Из $T \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \beta\big(\alpha(T)\big)$ при антитонности отображения α и β следует

$$\alpha\Big(\beta\big(\alpha(T)\big)\Big) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \alpha(T).$$

При замене типа $\alpha(T)$ типом $T' := \alpha(T)$ получается

$$T' \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \alpha\big(\beta(T')\big),$$

следовательно

$$\alpha(T) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \alpha\Big(\beta\big(\alpha(T)\big)\Big).$$

Рассмотрим аналогично другой случай. При этом справедливы высказывания леммы 3.27. □

Вывод 3.28. *При замене в лемме 3.27 множества M_1 и M_2 типами*

$$M_1 := \{\, T^{\kappa_G \kappa_G} \mid T : T_G \,\} \text{ и} \tag{3.56a}$$

$$M_2 := \{\, T^{\kappa_G \kappa_G} \mid T : T_M \,\}, \tag{3.56b}$$

то α и β составляют соответствие Galois *между M_1 и M_2 и относительно $\sqsubseteq_d$.*

Доказательство. Для $\{\, T_1^{\kappa_G \kappa_G}, T_2^{\kappa_G \kappa_G} \,\} \subseteq M_1$ относительно леммы 3.23 верно:

$$T_1^{\kappa_G \kappa_G} \sqsubseteq_d T_2^{\kappa_G \kappa_G} \text{ тогда и только тогда, когда } T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2.$$

При этом можно воспользоваться доказательством леммы 3.27, как, например, для следующего условия.

Из $T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$ при помощи леммы 3.27 следует $\alpha(T_2) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} \alpha(T_1)$. В силу (3.44) имеем:

$$\text{из } T_1^{\kappa_G \kappa_G} \sqsubseteq_d T_2^{\kappa_G \kappa_G} \text{ следует } \alpha(T_1^{\kappa_G \kappa_G}) \sqsupseteq_d \alpha(T_2^{\kappa_G \kappa_G}).$$

Аналогично можно показать справедливость всех остальных условий. □

Лемма 3.29. *Пусть $T_1 : T_G$ и $T_2 : T_M$ — два типа сигнатуры контекста $\mathbb{K}_G$. Тогда верно*

$$\big(\mathbb{I}^I(T_1^{\kappa_G \kappa_G}), \mathbb{I}^I(T_1^{\kappa_G})\big) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \tag{3.57a}$$

$$\big(\mathbb{I}^I(T_2^{\kappa_G}), \mathbb{I}^I(T_2^{\kappa_G \kappa_G})\big) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \tag{3.57b}$$

Доказательство. Соответственно леммы 3.17 верно:

$$\big(\mathbb{I}^I(T_1^{\kappa_G \kappa_G}), \mathbb{I}^I(T_1^{\kappa_G})\big) = \Big(\big(\mathbb{I}^I(T_1)\big)^{\kappa_G \kappa_G}, \big(\mathbb{I}^I(T_1)^{\kappa_G}\big)\Big),$$
$$\big(\mathbb{I}^I(T_2^{\kappa_G}), \mathbb{I}^I(T_2^{\kappa_G \kappa_G})\big) = \Big(\big(\mathbb{I}^I(T_2)\big)^{\kappa_G}, \big(\mathbb{I}^I(T_2)^{\kappa_G \kappa_G}\big)\Big).$$

При этом показано то, что требовалось доказать. □

Теорема 3.30. *Пусть* $\mathbb{K}_G$ — *контекст,* $\breve{w}(\mathbb{K}_G)$ — *расширенный мир и* Σ *сигнатура контекста* $\mathbb{K}_G$. *Тогда полупорядоченные множества*

$$\mathfrak{B}_1 = (\{\, T^{\kappa_G \kappa_G} \mid T : T_G \,\}, \sqsubseteq_d), \tag{3.58a}$$

$$\mathfrak{B}_2 = (\{\, T^{\kappa_G \kappa_G} \mid T : T_M \,\}, \sqsubseteq_d) \tag{3.58b}$$

составляют с помощью полупорядка $\sqsubseteq_d$ *полные решетки, которые являются изоморфными решеткой понятий* $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$.

Это также верно для

$$\mathfrak{B}_3 = (\{\, (T_1, T_2) \mid T_1 : T_G, T_2 : T_M, T_1 =_{\mathbb{I}} T_2^{\kappa_G}, T_2 =_{\mathbb{I}} T_1^{\kappa_G} \,\}, \sqsubseteq_{\mathbb{I}}) \tag{3.59}$$

при

$$(T_1, T_2) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} (T_3, T_4) \text{ тогда и только тогда, когда } T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_3 \\ \text{тогда и только тогда, когда } T_4 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2. \tag{3.60}$$

Доказательство. Впервые покажем, что $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_3$ являются изоморфными относительно их полупорядоков. Но это очевидно, так как для каждой пары $(T_1, T_2) \in \mathfrak{B}_3$ справедливы условия $T_1^{\kappa_G \kappa_G} \in \mathfrak{B}_1$ и $T_2^{\kappa_G \kappa_G} \in \mathfrak{B}_2$. С другой стороны верно $T_1^{\kappa_G \kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_1$ и $T_2^{\kappa_G \kappa_G} =_{\mathbb{I}} T_2$. Это получается из (3.59) при подстановке в соответствующий другой тип. Наоборот можно устроить для каждого типа из $\mathfrak{B}_1$ или $\mathfrak{B}_2$ двойник относительно равенства (3.59). Далее, полупорядок является стабильной относительно этой операции. Это следует из лемм 3.23 и 3.27, следствия 3.22 и 3.28 и (3.60). При соответствии типов, отношения между этих трех множеств являются стабильными относительно объединения и пересечения (лемма 3.23).

Рассмотрим отображение

$$\alpha(A, B) := (T_G^A, T_M^B).$$

Тогда верно $\alpha : \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G) \to \mathfrak{B}_3$ при выводе 3.18. Также согласно лемме 3.29 существует отображение

$$\alpha^{-1} : \mathfrak{B}_3 \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$$

при

$$\alpha^{-1}(T_1, T_2) := \big(\mathbb{I}^I(T_1), \mathbb{I}^I(T_2)\big).$$

При выводе 3.16 верно

$$\alpha^{-1}(\alpha(A, B)) = (A, B).$$

При этом α является инъективным. С другой стороны, для каждой пары $(T_1, T_2) \in \mathfrak{B}_3$ существует такое понятие $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_G)$, что выполняется условие $\alpha^{-1}(T_1, T_2) = (A, B)$. Тогда верно

$$\begin{aligned}\alpha(A, B) &=_d ([\dot{p} \mid w \vDash \forall(\dot{q} \in B)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle], [\dot{q} \mid w \vDash \forall(\dot{p} \in A)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle])\\ &=_d \Big(\big[\dot{p} \;\big|\; w \vDash \forall\big(\dot{q} \in \mathbb{I}^I(T_2)\big)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle\big],\\ &\qquad\qquad \big[\dot{q} \;\big|\; w \vDash \forall\big(\dot{p} \in \mathbb{I}^I(T_1)\big)\langle\!\langle R_{\mathbb{K}}, \dot{p}, \dot{q}, 1\rangle\!\rangle\big]\Big)\\ &=_d (T_2^{\kappa G}, T_1^{\kappa G}) =_{\mathbb{I}} (T_1, T_2).\end{aligned}$$

Из этого следует сюръективность, а при этом также биективность отображения α.

Рассмотрим монотонность отображения α и α^{-1}. Пусть (3.60) верно для четырех типов T_1—T_4. Тогда верно

$$T_1 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_3, \text{ когда и только когда } \mathbb{I}^I(T_1) \subseteq \mathbb{I}^I(T_3).$$

Аналогичным образом верно $\mathbb{I}^I(T_4) \subseteq \mathbb{I}^I(T_2)$, когда и только когда $T_4 \sqsubseteq_{\mathbb{I}} T_2$. А при этом $\alpha^{-1}(T_1, T_2) \sqsubseteq \alpha^{-1}(T_3, T_4)$ верно, если и только если $(T_1, T_2) \sqsubseteq_{\mathbb{I}} (T_3, T_4)$. При этом имеем — монотонность. Согласно лемме 3.26 верна и стабильность объединения и пересечения, так как в лемме 3.23 уже было показано, что оба полупорядка типов являются эквивалентными на рассматриваемых множествах. $\square$

Замечание 3.31. Решетки из равенства (3.58a) и (3.58b) можно использовать например, чтобы применять метод формального анализа с помощью мира, который определен относительно примера 3.4. В противоположности к теории множеств здесь тип кодирует и двойственный вид (предметы и признаки).

В теореме 3.30 показано, что кроме изоморфии можно близкими методами устроить решетку понятий контекста, как это делается обычно в формальном анализе понятий. Эту решетку понятий можно использовать, для определения и применения методов, как, например, редукция контекстов.

Хоть теория решеток и обладает более удобным формализмом при проведении формального анализа понятий, все же при рассмотрении проблем формального анализа понятий можно пользоваться теорией ситуацией, в силу ее мощи.

Заключительное слово

Представленная в этой работе тория базируется полностью на принципах классической теории множеств и классической алгебра, и является при этом только небольшой частью того, что исследует теория ситуаций. Несмотря на то удалось показать ее пригодность для копирование таких известных структур как решетка понятий. Поэтому также является возможным использование понятий и методов формального анализа понятий и их описание с помощью изложенного в этой работе формализма. Например, можно рассматривать частичные контексты, как ситуации и импликации, как связи.

С одной стороны для общепринятой теории о информации — как теорие ситуаций хочется быть — важно не только ее описание, но и разработка эвристик и алгоритмов для дальнейшей работы с ней и ее использования. Этим руководствовались исследователи теории ситуаций при изучении механизмов узнавания и переработки информации. К примеру, Keith Devlin рассматривает в (Devlin 1993) также умственные состояния как „знать“, „верить“ и „желать“.

С другой стороны теория ситуаций попробует приблизить ее возможности представления к тем естественных языков и при этом взломать границы классической предикативной логики. Jon Barwise, например, говорит в (Barwise 1989, глава 14) о ситуированности классической теории множеств.

Универсальное множество в классической теории множеств всегда является частью другого универсального множества, хотя множества высшего универсального множества с точки зрения низшего при обстоятельствах, являются только классы. Keith Devlin даже говорит о теории множеств без аксиомы основания (смотри (Devlin 1993, стр. 166, сноска 7) и (Barwise 1989, глава 8)). Чтобы решать проблемы парадоксов, он использует градацию в области ситуаций и мира, также как это делает классическая предикативная логика высшей степени с отношениями.

Это только два примера. Существуют иные возможности описать теорию ситуаций. Jon Barwise опишет в (Barwise 1989, глава 11) около двадцати разветвлений, которые требуют или разрешают различные свойства. Какие из них будут востребованы, покажет будущее. Несмотря на то, существуют уже несколько опытов, теоретично или практично приложить теорию ситуаций, как например (Restall 1996) и (Huibers и др. 1996).

Литература

Barwise 1989 Barwise, Jon: *CSLI Lecture Notes*. том 17: *The Situation in Logic*. Center for the Study of Language and Information Publications, 1989 г. – ISBN 0-937073-33-4, ISBN 0-937073-32-6

Birkhoff 1940 Birkhoff, Garret: *Colloquium publications*. том 25: *Lattice theory*. American Mathematical Society, 1940 г

Devlin 1991 Devlin, Keith: *Logic and Information*. 1st edition. Cambridge, England : Cambridge University Press, 1991 г

Devlin 1993 Devlin, Keith: *Infos und Infone: die mathematische Struktur der Information*. 1. Auflage. Boston, Berlin : Birkhäuser, 1993 г. – ISBN 3-7643-2703-0

Dretske 1981 Dretske, F.: *Knowledge and the Flow of Information*. MIT Press, 1981 г (Bradford Books)

Ganter и Wille 1996 Ganter, Bernhard ; Wille, Rudolf: *Formale Begriffsanalyse : Mathematische Grundlagen*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1996 г. – ISBN 3-540-60868-0

Hebisch 1991 Hebisch, Udo: Eine Verbandstheoretische Präzisierung des Informationsbegriffes / Technische Universität Clausthal. Technische Universität Clausthal, Institut für Mathematik, Erzstraße 1, 3392 Clausthal-Zellerfeld, октября 1991 г (Mathematik-Bericht 91/2). – Forschungsbericht

Huibers и др. 1996 Huibers, Th. W. C. ; Lalmas, Mounia ; Rijsbergen, C. J. van: Information Retrieval and Situation Theory. в: *SIGIR Forum* 30 (1996), № 1, стр. 11–25. – URL `http://citeseer.nj.nec.com/huibers96information.html` . – дата скачания: 02. 07. 2003 г

Kunath 2001 Kunath, Andreas: *Implikation und Information*, TU Bergakademie Freiberg, Diplomarbeit, мая 2001 г

Perry 1999? PERRY, John: *Semantics, Situation*. Гл. U041. в: *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, Routledge, 1999? г. – URL `http://www.rep.routledge.com/` . – дата скачания: 19 июня 2003 г. – URL `http://www-csli.stanford.edu/~john/PHILPAPERS/sitsem.pdf`

Restall 1996 RESTALL, Greg: Notes on Situation Theory and Channel Theory / Macquarie University Sydney. Department of Philosophy, School of History, Philosophy and politics, Macqarie University Sydney NSW 2109, 16 июня 1996 г. – исследовательский отчет. – URL `http://consequently.org/papers/channels.pdf` . – дата скачания: 19 июня 2003 г

Scott 1982 SCOTT, Dana S.: Domains for denotational semantics. в: *Lecture Notes Computer Science* (1982), № 140, стр. 577–613

Sonntag 1998 SONNTAG, Martin: *Formale Begriffsanalyse*. Lehrskript. 1998 г. – URL `http://www.mathe.tu-freiberg.de/~sonntag/skripte.html` . – дата скачания: 15 января 2003 г

Zalta 1993 ZALTA, Edward N.: Twenty-Five Basic Theorems in Situation and World Theory. в: *Journal of Philosophical Logic* том 22, URL `http://mally.stanford.edu/abstracts/twenty-five.html` . – дата скачания: 31 марта 2003 г, 1993 г, стр. 385–428. – Preprint-Version

Копытов 1984 КОПЫТОВ, Валерий Матвеевич: *Решеточно упорядоченные группы*. Москва : Наука, 1984 г (Современная Алгебра)

Предметный указатель

Объявление взамен присяги

Этом я уверяю, что я изготовлял данную работу без неразрешенной помощи и других чем указанных пособиях; мысля, из посторонних источниках прямо или непрямо переносные мысля являются обозначены такими.

Freiberg, 17 апреля 2004 г.

Tobias Schlemmer

Объявление

Этим я объявлю о своем согласии с публичной установкой данной дипломной работы в библиотеках.

Freiberg, 17 апреля 2004 г.

научный руководитель кандидат